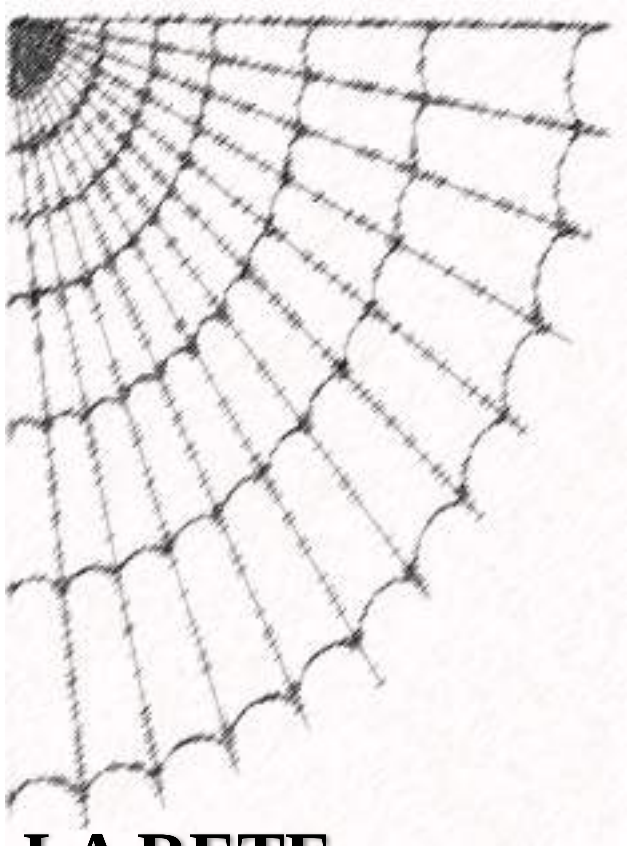
Costruire la casa di Matematica e Scienze nelle nostre scuole



LA RETE TERRITORIALE DI GALILEO

Ferdinando Arzarello

Dipartimento di Matematica "G. Peano"

Università di Torino

Mondovì, 5 settembre 2017

insegnare

Competenze: come/che cosa si insegna?

apprendere

- **sviluppare competenze scientifiche** UE *in continuità tra ordini di scuola diversi*

- evidenziare la relazione tra la storia e la didattica delle scienze

- **implementare una comunità professionale** che si riconosce in metodologie comuni, costruisce un linguaggio comune attraverso condivisione di percorsi di formazione, progetta percorsi e valuta quanto attivato

- **condividere, valorizzare e utilizzare** in modo **capillare i laboratori e i musei patrimonio dei diversi Istituti**

- offrire **opportunità di reiterare nel tempo percorsi** validati e documentati sul sussidio didattico «Quaderno di lavoro» e di utilizzare materiale inserito sulla piattaforma degli Istituti

Indicazioni

La competenza matematica *è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze* **aritmetico-***matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, schemi, grafici, rappresentazioni).*

***La competenza in campo scientifico** si riferisce alla capacità e alla disponibilità a usare l'insieme delle conoscenze e delle metodologie possedute per spiegare il mondo che ci circonda sapendo identificare le problematiche e traendo le conclusioni che siano basate su fatti comprovati.*

Indicazioni

La competenza in campo tecnologico *è considerata l'applicazione di tale conoscenza e metodologia per dare risposta ai desideri o bisogni avvertiti dagli esseri umani. La competenza in campo scientifico e tecnologico comporta la comprensione dei cambiamenti determinati dall'attività umana e la consapevolezza della responsabilità di ciascun cittadino.*

Profilo delle competenze al termine del primo ciclo di istruzione

Le sue conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l'attendibilità delle analisi quantitative e statistiche **proposte da altri**.
Il possesso di un pensiero razionale gli consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere consapevolezza dei limiti delle affermazioni che riguardano questioni complesse che non si prestano a spiegazioni univoche.

LINEE GENERALI E COMPETENZE

Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

LINEE GENERALI E COMPETENZE

concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

… 3) un’introduzione ai concetti matematici necessari per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle nozione di derivata;

4) un’introduzione ai concetti di base del calcolo delle probabilità e dell’analisi statistica;

Indic: secondo ciclo

LINEE GENERALI E COMPETENZE

concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);

6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo.

…

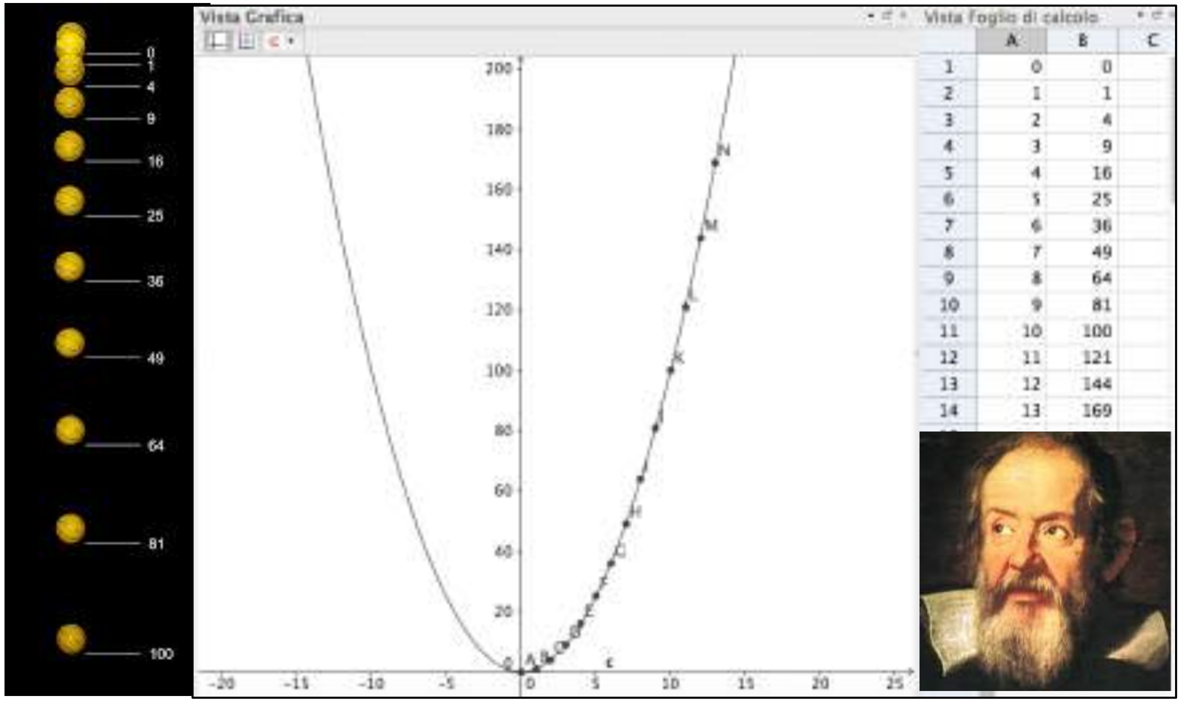
Quadro Istituzionale

CONOSCENZE
(Unità Epistemica)

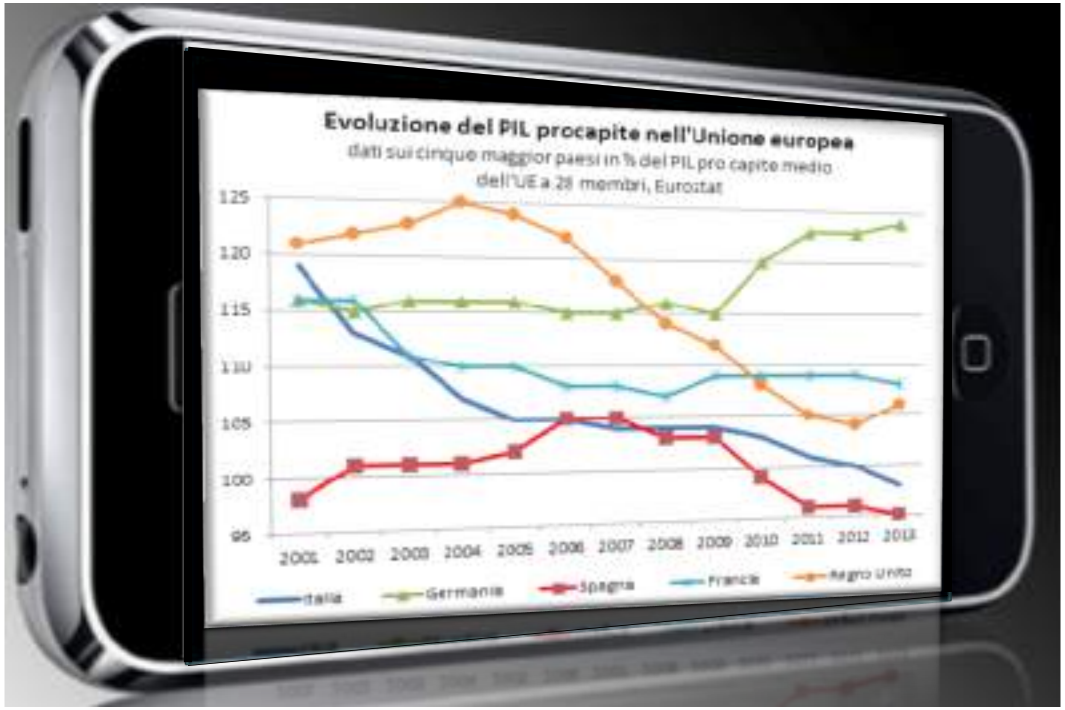
Cercherò di comunicarvi il senso della proposta tramite vari esempi: mi baserò su di essi per trarre alcune riflessioni generali con l'obiettivo di definire propriamente la cornice teorica **CD**+**UE**+**UM** .

Uniformità Metodologica

PRATICHE
(Continuità Didattica)



Modellizzare il cambiamento: le radici cognitive e culturali della matematica e della scienza



CONOSCENZE
(Unità Epistemica)


Il laboratorio
Uniformità
Metodologica
l'allievo
come ricercatore

PRATICHE
(Continuità Didattica)

Imparare a pensare matematicamente

Quali competenze nella classe di matematica?

Il senso matematico delle cose

Imparare a pensare matematicamente significa:

(a) sviluppare un punto di vista matematico: valorizzare i processi di matematizzazione e astrazione e avere la predilezione per applicarli;

(b) sviluppare le competenze proprie degli strumenti del mestiere, e utilizzarli con l'obiettivo di giungere a una comprensione "strutturale" dei fenomeni, cioè sviluppare **il senso degli studenti per la matematica** (mathematical sense-making).

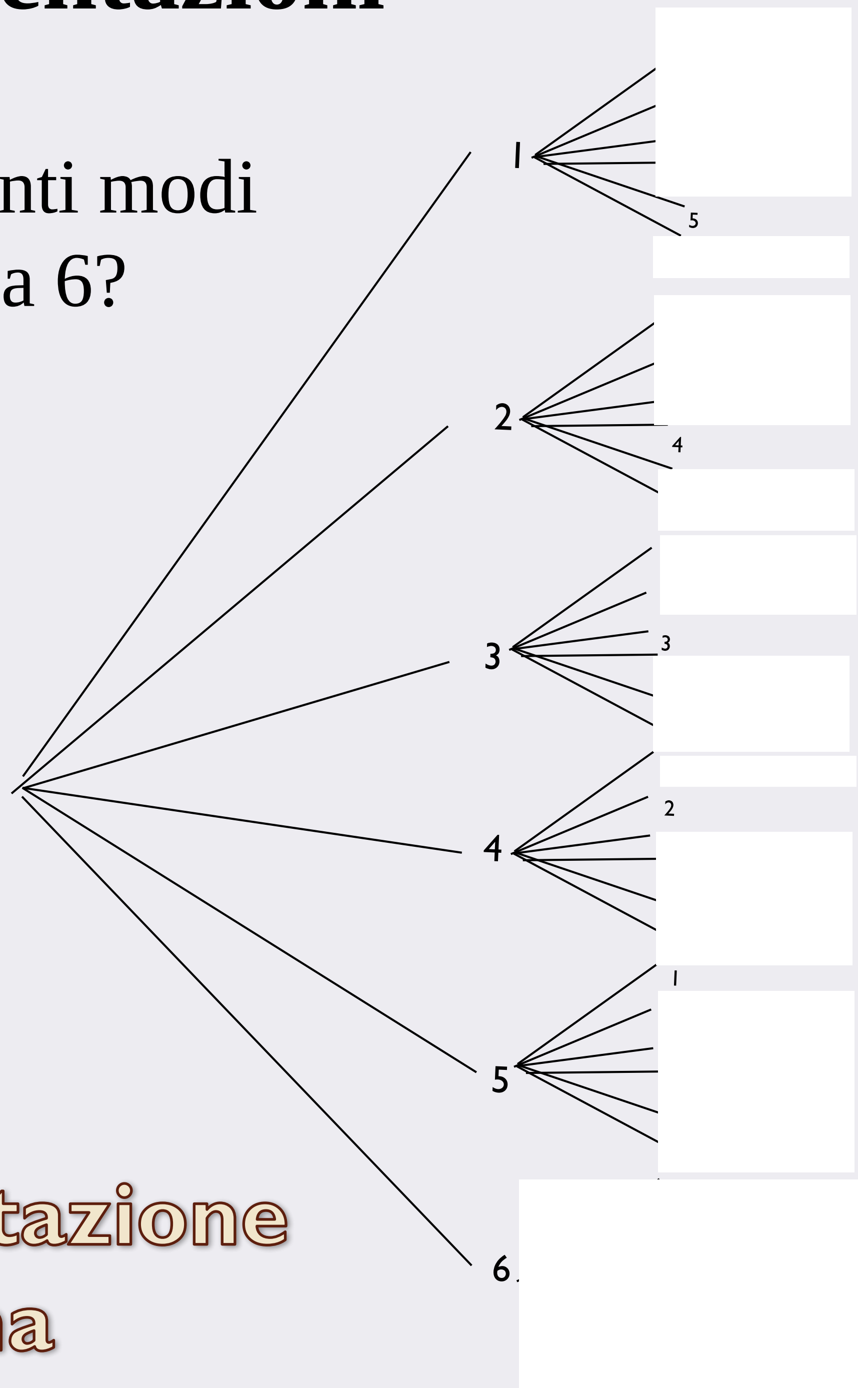
(A. Schoenfeld)

Esempio 1

Se lancio due dadi in quanti modi posso ottenere somma 6?

Rappresentazioni

Se lancio due dadi in quanti modi posso ottenere somma 6?



Una 1ª rappresentazione del problema

2ª Rappresentazione

Somma dadi	Combinazioni	N
2	(1,1)	1
3	(1,2) (2,1)	2
4	(1,3) (2,2) (3,1)	3
5	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	4
6	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	5
7	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	6
8	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	5
9	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	4
10	(4,6) (5,5) (6,4)	3
11	(5,6) (6,5)	2
12	(6,6)	1
	TOTALE	36

Esempio 2
Rappresentazioni e analogie

Se lancio **tre, quattro,… N** dadi in quanti modi posso ottenere somma 6?

Analogia & Rappresentazione

[illegible]	Combinazioni	N	tot
[illegible]	[illegible]	1	1
[illegible]	(1,1,2) (1,2, [illegible] 1,1)	3	3
5	(1,1,3) (1,2,2)	3+3	6
6	(1,1,4) (1,2,3) (2,2,2)	3+6+1	10
7	(1.1.5) (1,2,4)(1,3,3) (2,2,3)	3+6+3+3	15
8	(1.1.6) (1,2,5) (1,3,4) (2,2,4) (2,3,3)	3+6+6+3+3	21
9	(1,2,6) (1,3,5) (1.4.4) (2,3,4) (2,5,2) (3,3,3)	6+6+3+6+3+1	25
10	(1,3,6) (1,4,5) (2,3,5) (2,4,4) (2.6.2) (3,3,.4)	6+6+6+3+3+3	27
11	(1,4,6) (2,4,5) (2,3,6) (3.4.4) (5,1,5) (3,3,5)	6+6+6+3+3+3	27
12	(1,5,6) (2,4,6) (6.3,3) (5,4,3) (5,2,5) (4,4,4)	6+6+3+6+3+1	25
13	(1,6,6) (2,5,6) (6.4,3) (5,5,3) (5,4,4)	3+6+6+3+3	21
14	(2,6,6) (3,5,6) (6.4,4) (5,5,4)	3+6+3+3	15
15	(3,6,6) (4,5,6) (5,5,5)	3+6+1	10
16	(4,6,6) (5,5,6)	3+3	6
17	(5,6,6)	3	3
18	(6,6,6)	1	1
	TOTALE	216	

Somma di tre dadi

Rappresentazioni e Modelli

- Noi pensiamo comunemente in termini di modelli perché forniscono il processo di ragionamento con gli elementi strutturanti e stimolanti necessari al suo corso creativo.

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per ***esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.***

Le analogie sono una fonte molto ricca di modelli. Due oggetti, due sistemi, sono analoghi se, sulla base di una certa somiglianza parziale, si può assumere che le rispettive entità siano simili anche per altri aspetti. La differenza tra analogia e somiglianza banale è che l'analogia giustifica inferenze plausibili: una casa rossa e una fragola hanno lo stesso colore, ma nessuno vedrà alcuna analogia tra la casa rossa e la fragola. L'analogia implica quindi la somiglianza della struttura, un insieme di proprietà strutturate comuni.

Il meccanismo della metafora è basato sull'analogia (es.: tempo → spazio: settembre si avvicina e le ferie si allontanano)

Un'analogia intuitiva aiuta a ottenere una rappresentazione iconica unitaria con un significato comportamentale concreto. Una comprensione intuitiva diventa quindi possibile. Il processo di ragionamento ottiene un "oggetto", un sistema di rappresentazione con le sue qualità di immediatezza, globalità, capacità generativa, consistenza intrinseca e possibilità di estrapolazione.

Esempi: retta numerica; piano cartesiano; corrente elettrica e fluidi; modello di Rutheford per l'atomo.

Il modello fornisce un oggetto mentale compatto, strutturato, relativamente familiare e coerente, un elemento vitale di un processo di ragionamento attivo e visibile.

MODELLI ANALOGICI IN MATEMATICA

L'analogia interviene spesso nel ragionamento matematico.
Nel passaggio da 2 a 3 a 4…dadi la si sfrutta.

Altro esempio. Se uno studente sa che l'area di un rettangolo è B x H, può naturalmente estendere il principio di questa soluzione al volume di un prisma o di un cilindro in cui B diventa l'area della base del prisma o del cilindro.

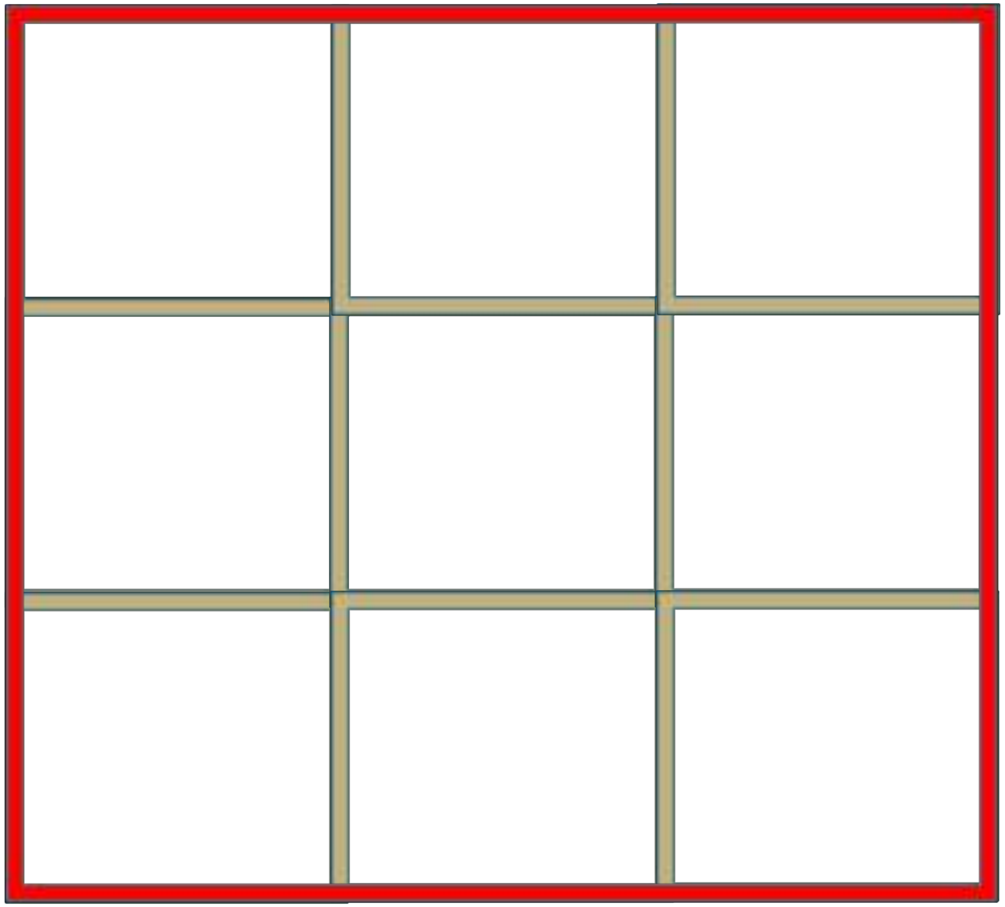
Polya parla di "grandi analogie" nella matematica.
Cita l'analogia fondamentale tra il dominio dei numeri e quello delle figure (piano cartesiano), analogia che rappresenta il terreno fondante per la geometria analitica.

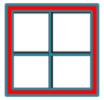
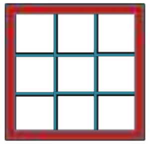
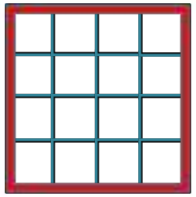
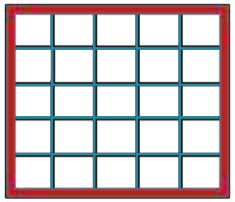
Esempio 3

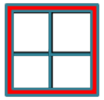
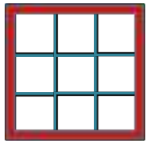
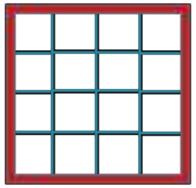
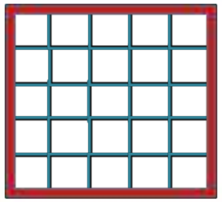
Il pasticcere geometra

Arcavi, A. & Friedlander, A. (in press),
Tasks and Competencies in the Teaching and Learning of Algebra, NCTM

Modello schematico della torta e dei tagli

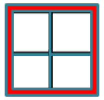
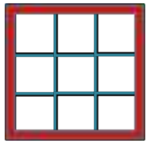
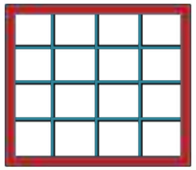
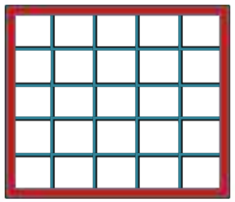


	taglia	n. 1-quadr.	n. 1-quadr. senza fr.	n. 1-quad fragole 1 lato	n. 1-quad fragole 2 lati	
	2x2					
	3x3					
	4x4					
	5x5					
	axa					

	taglia	n. 1-quadr.	n. 1-quadr. senza fr.	n. 1-quad fragole 1 lato	n. 1-quad fragole 2 lati	
	2x2	$4 = 2^2$	0	0	4	
	3x3	3^2	1	4=4x1	4	
	4x4	4^2	2^2	8=4x2	4	
	5x5	5^2	3^2	12=4x3	4	
	axa	a^2	$(a-2)^2$	$4(a-2)$	4	

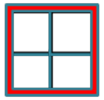
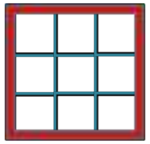
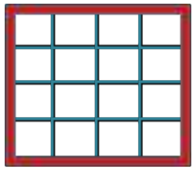
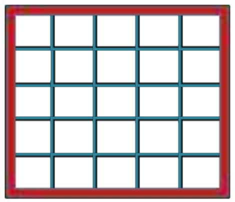
Passo 1a

Guarda con occhio matematico numeri e formule: che cosa osservi?

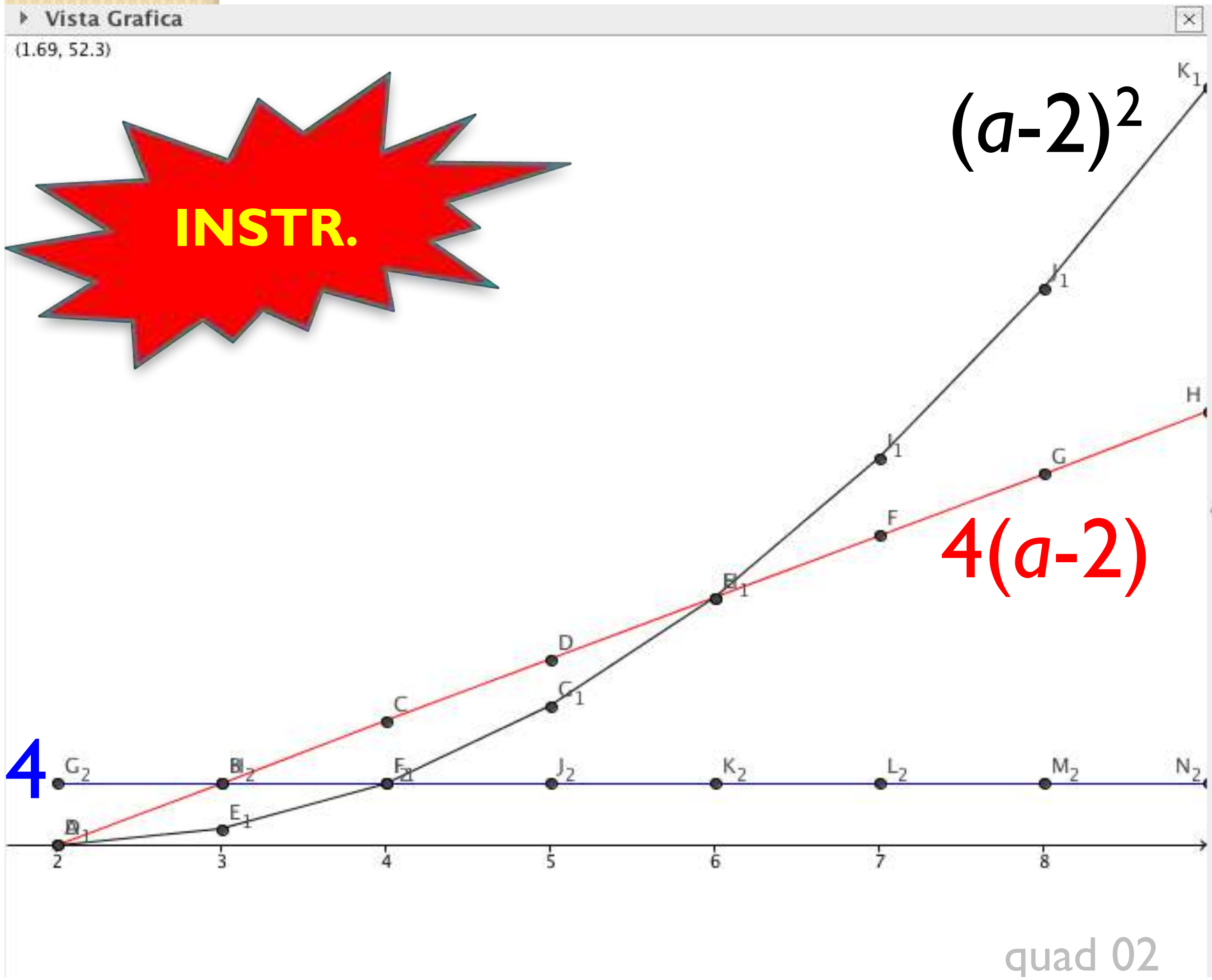
	2x2	$4 = 2^2$	0	0	4	
	3x3	3^2	1	4=4x1	4	
	4x4	4^2	2^2	8=4x2	4	
	5x5	5^2	3^2	12=4x3	4	
	axa	a^2	$(a-2)^2$	$4(a-2)$	4	

Passo 1b

Come puoi rappresentare i dati?

	2x2	$4 = 2^2$	0	0	4	
	3x3	3^2	1	4=4x1	4	
	4x4	4^2	2^2	8=4x2	4	
	5x5	5^2	3^2	12=4x3	4	
	axa	a^2	$(a-2)^2$	$4(a-2)$	4	

1b. Come puoi rappresentare i dati? Che cosa osservi ora?

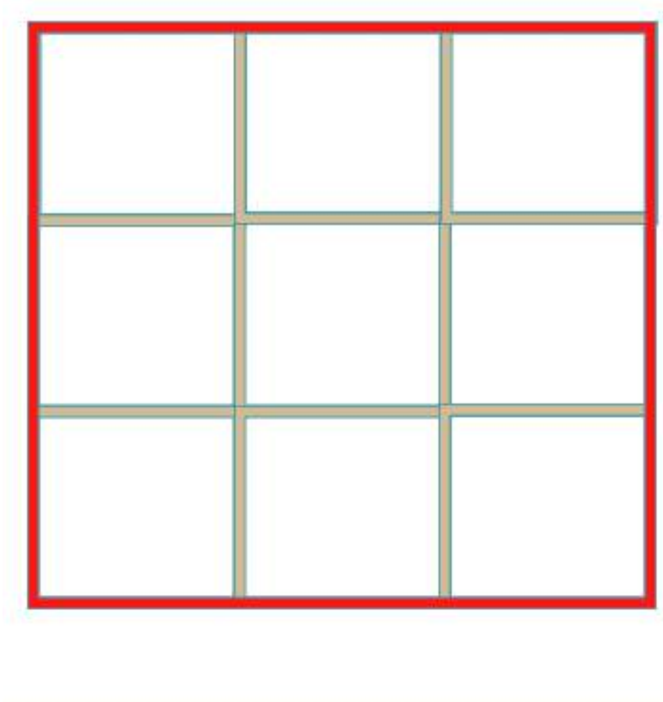


Vista Foglio di calcolo

	B	C	D	E	F
1	0	2	0	2	4
2	4	3	1	3	4
3	8	4	4	4	4
4	12	5	9	5	4
5	16	6	16	6	4
6	20	7	25	7	4
7	24	8	36	8	4
8	28	9	49	9	4
9	32	10	64	10	4
10	36	11	81	11	4
11	40	12	100	12	4
12	44	13	121	13	4
13	48	14	144	14	4
14	52	15	169	15	4
15	56	16	196	16	4
16	60	17	225	17	4
17	64	18	256	18	4
18	68	19	289	19	4
19	72	20	324	20	4
20	76	21	361	21	4
21	80	22	400	22	4
22	84	23	441	23	4
23	88	24	484	24	4
24	92	25	529	25	4
25	96	26	576	26	4
26	100	27	625	27	4

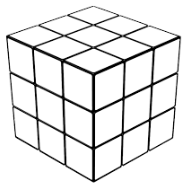
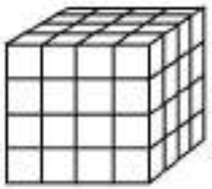
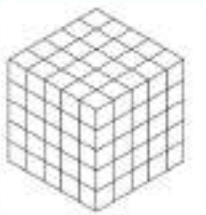
Passo 2

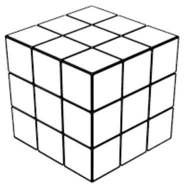
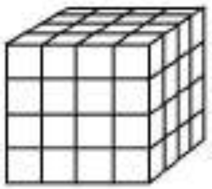
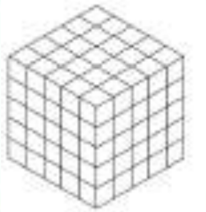
Come sarebbe se…?



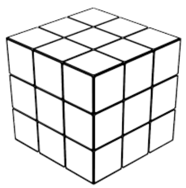
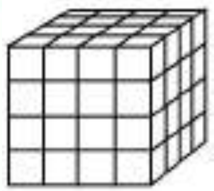
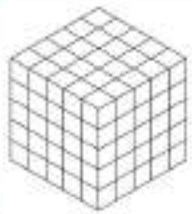
Pensa a una situazione simile (per es. a tre dimensioni): come cambiano le risposte alle domande 1a, 1b?

La storia

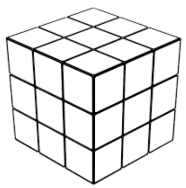
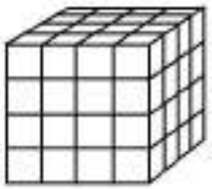
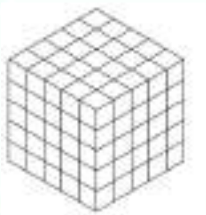
	taglia	n. 1-cubi	n. 1-cubi non glassati	n. 1-cubi glassati 1 faccia	n. 1-cubi glassati 2 facce	n. 1-cubi glassati 3 facce
	2x2x2					
	3x3x3					
	4x4x4					
	5x5x5					
a 1-cubi	axaxa					

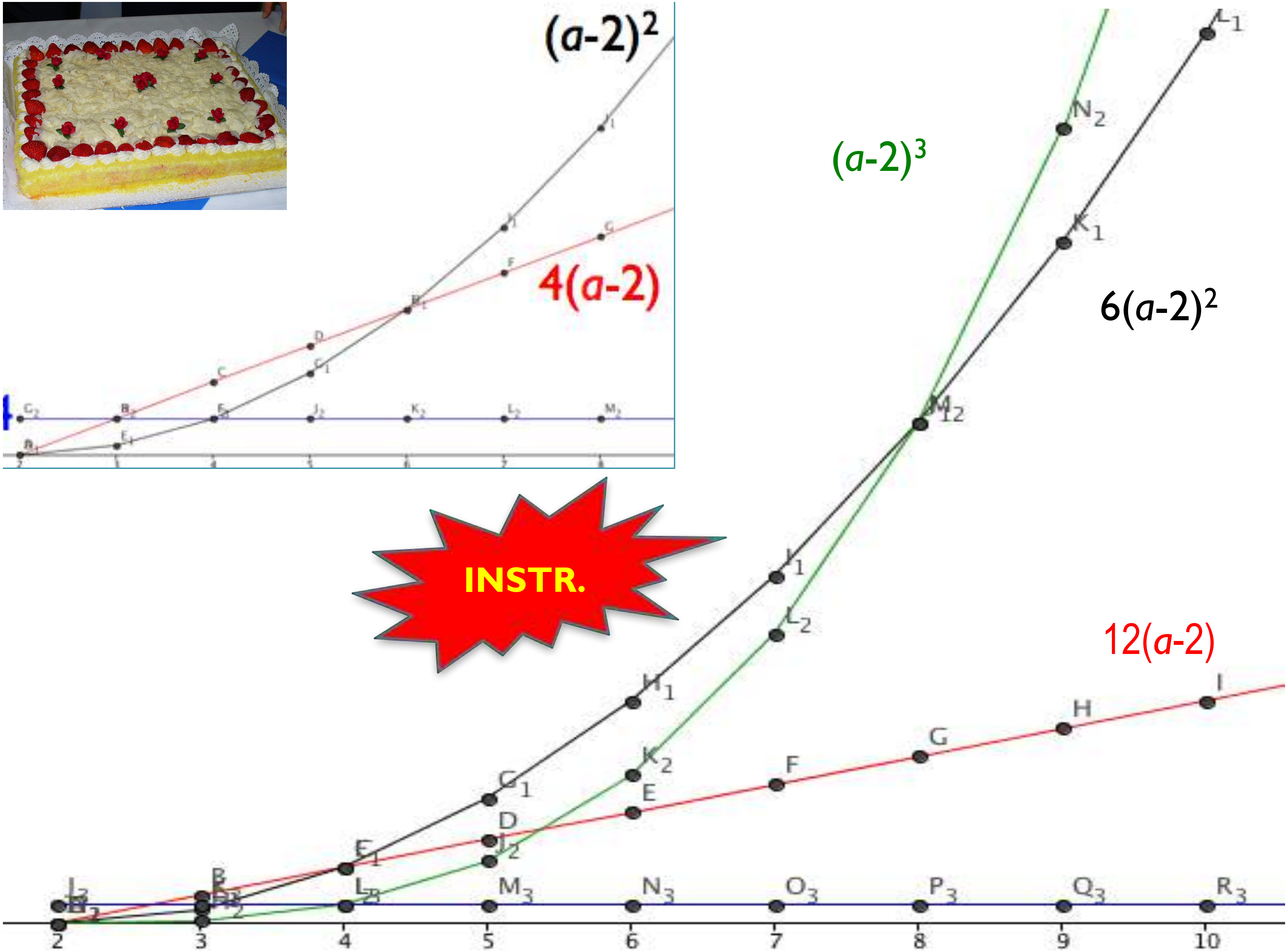
	taglia	n. 1-cubi	n. 1-cubi non glassati	n. 1-cubi glassati 1 faccia	n. 1-cubi glassati 2 facce	n. 1-cubi glassati 3 facce
	2x2x2	$8 = 2^3$	0	0	0	8
	3x3x3	3^3	1	6=6x1	12=12x1	8
	4x4x4	4^3	2^3	24=6x4	24=12x2	8
	5x5x5	5^3	3^3	54=6x9	36=12x3	8
a 1-cubi	axaxa	a^3	$(a-2)^3$	$6(a-2)^2$	$12(a-2)$	8

1a. Guarda con occhio matematico numeri e formule: che cosa osservi?

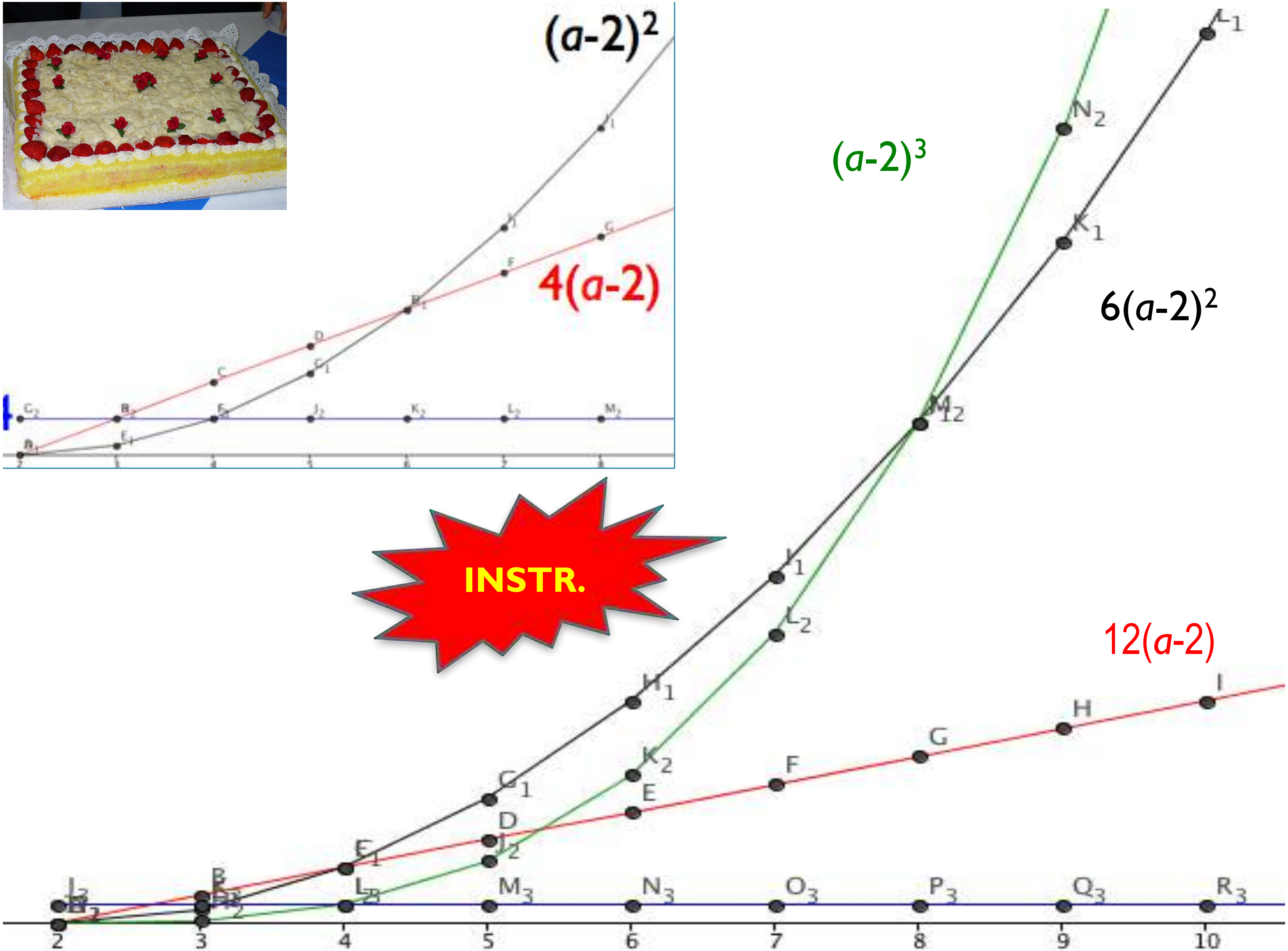
	2x2x2	$8 = 2^3$	0	0	0	8
	3x3x3	3^3	1	6=6x1	12=12x1	8
	4x4x4	4^3	2^3	24=6x4	24=12x2	8
	5x5x5	5^3	3^3	54=6x9	36=12x3	8
a 1-cubi	$a \times a \times a$	a^3	$(a-2)^3$	$6(a-2)^2$	$12(a-2)$	8

1b. Come rappresentarli graficamente?

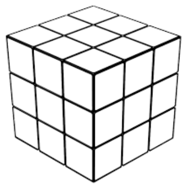
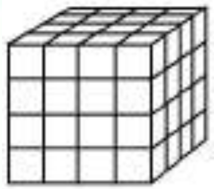
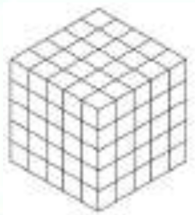
	2x2x2	$8 = 2^3$	0	0	0	8
	3x3x3	3^3	1	6=6x1	12=12x1	8
	4x4x4	4^3	2^3	24=6x4	24=12x2	8
	5x5x5	5^3	3^3	54=6x9	36=12x3	8
a 1-cubi	axaxa	a^3	$(a-2)^3$	$6(a-2)^2$	$12(a-2)$	8



(a-2)²
4(a-2)
(a-2)³
6(a-2)²
12(a-2)
INSTR.
2 3 4 5 6 7 8 9 10



$(a-2)^2$
$4(a-2)$
$(a-2)^3$
$6(a-2)^2$
$12(a-2)$
INSTR.
2
3
4
5
6
7
8
9
10

	taglia	n. 1-cubi	n. 1-cubi non glassati	n. 1-cubi glassati 1 faccia	n. 1-cubi glassati 2 facce	n. 1-cubi glassati 3 facce
	2x2x2	$8 = 2^3$	0	0	0	4
	3x3x3	3^3	2	9	12	4
	4x4x4	4^3	12	28	20	4
	5x5x5	5^3	36	57	28	4
a 1-cubi	axaxa	a^3	$(a-1)(a-2)^2$	$5a^2-16a+12$	$8a-12$	4

MODELLI DIAGRAMMATICI
COME FONTE DI ANALOGIE

Una categoria di modelli importante per stimolare/supportare il ragionamento matematico e le analogie è quella dei diagrammi. In linea generale, i diagrammi sono rappresentazioni grafiche dei fenomeni e delle loro relazioni.

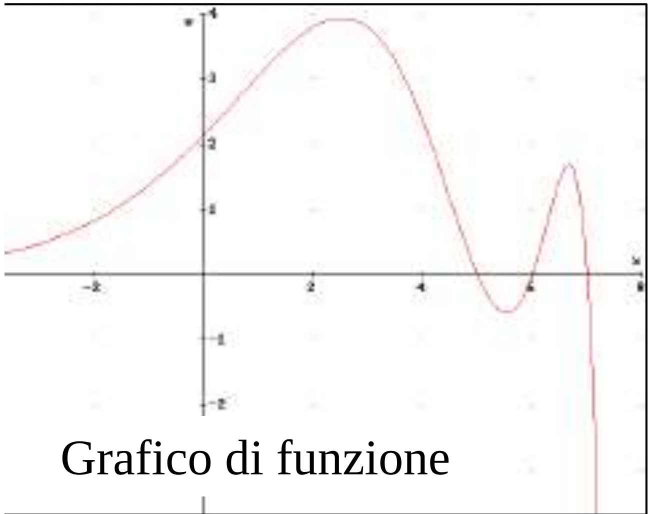
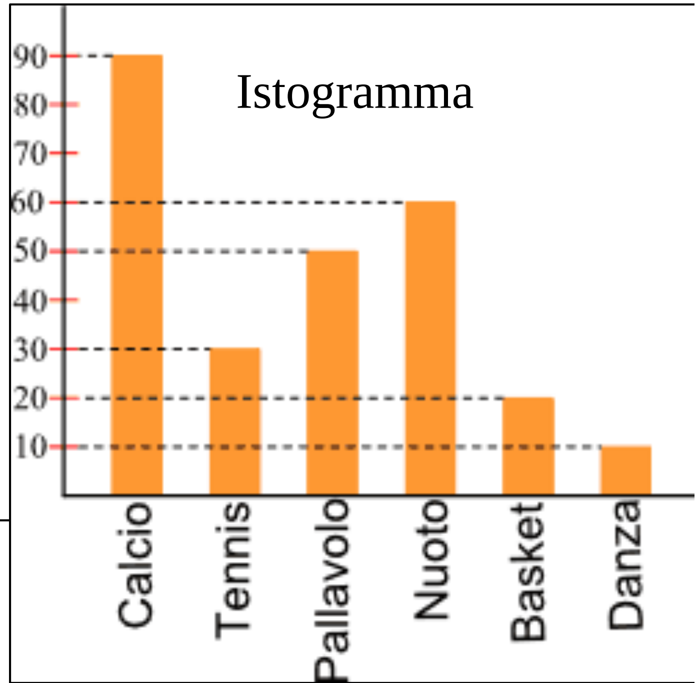


Grafico di funzione



Istogramma

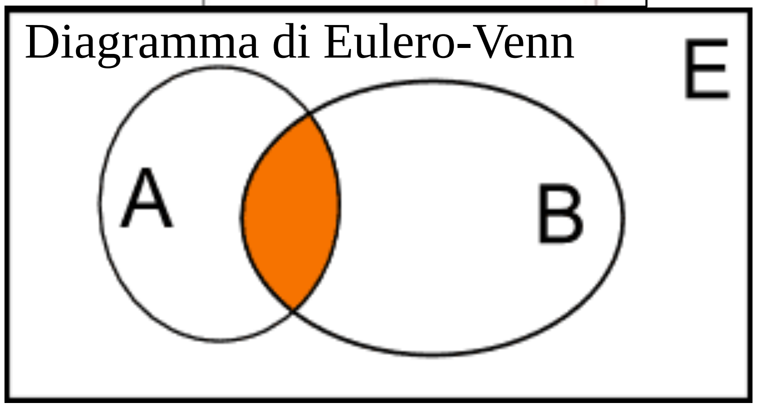


Diagramma di Eulero-Venn

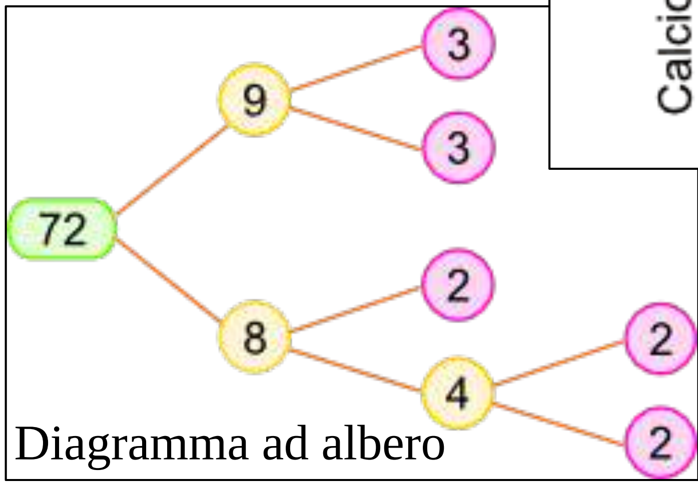
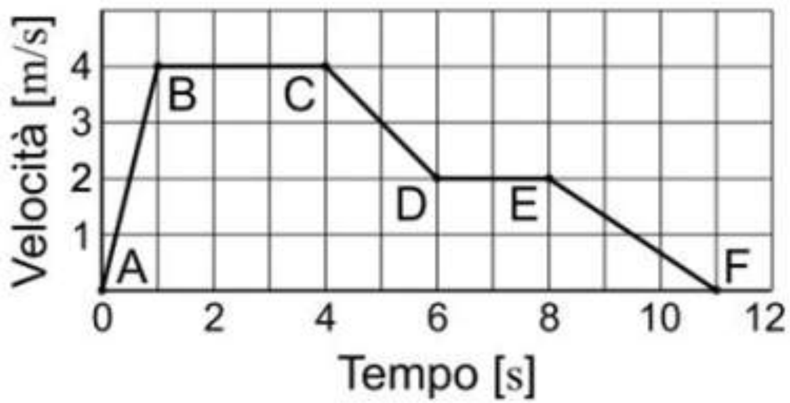


Diagramma ad albero

Un problema cognitivo e didattico

I diagrammi non sono generalmente l'immagine diretta di una certa realtà. Se si vuole ottenere una sensazione intuitiva di quello che significa "velocità" si deve guardare un corpo in movimento o, meglio, confrontare due corpi in movimento.

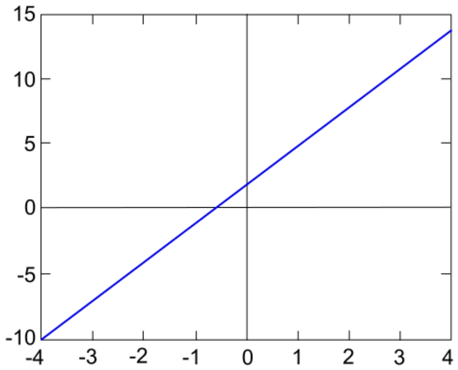


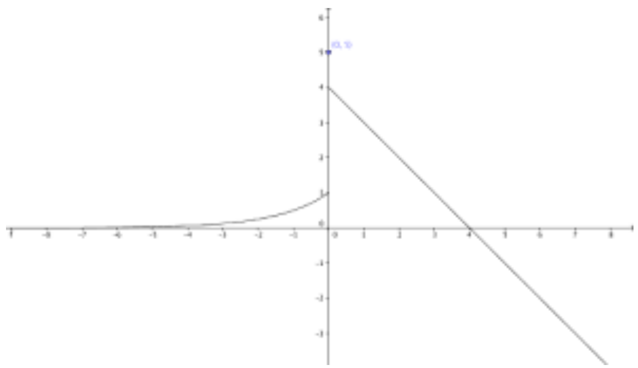
Ma con i diagrammi le cose sono completamente diverse poiché un diagramma, anche se espresso in termini figurativi, non è un'istanza cognitiva primaria.

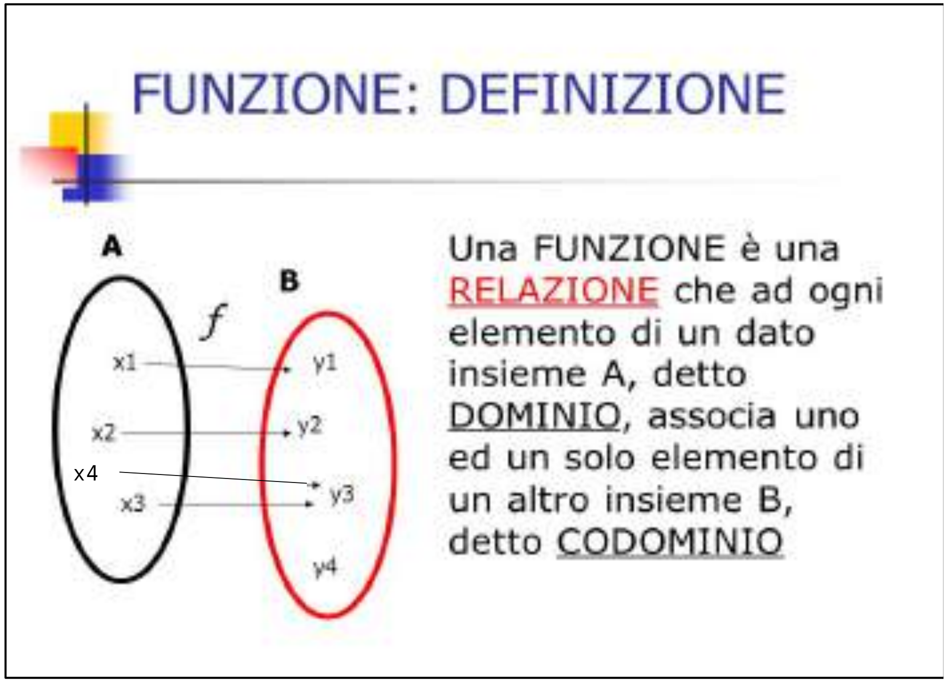
È l'espressione figurale di una struttura concettuale già elaborata, come un qualsiasi altro sistema simbolico.

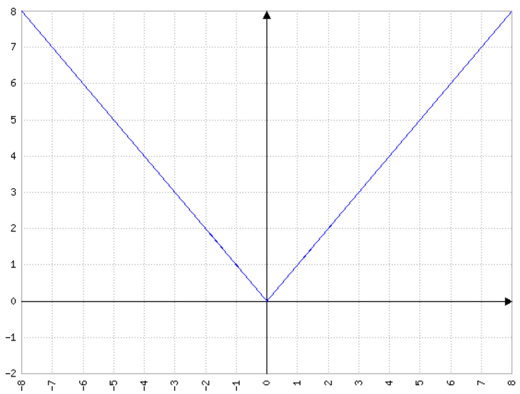
Un tipo particolarmente importante di diagrammi è dato dai grafici che rappresentano le funzioni.

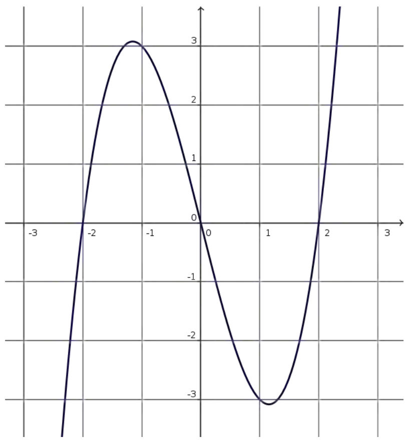
Esempi:

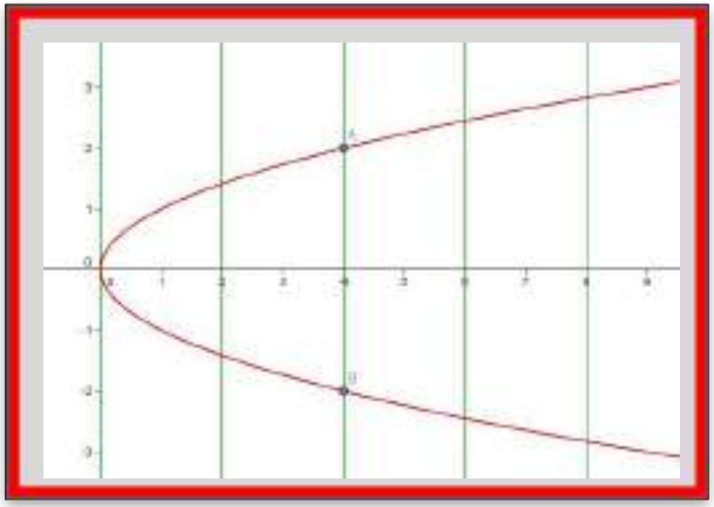






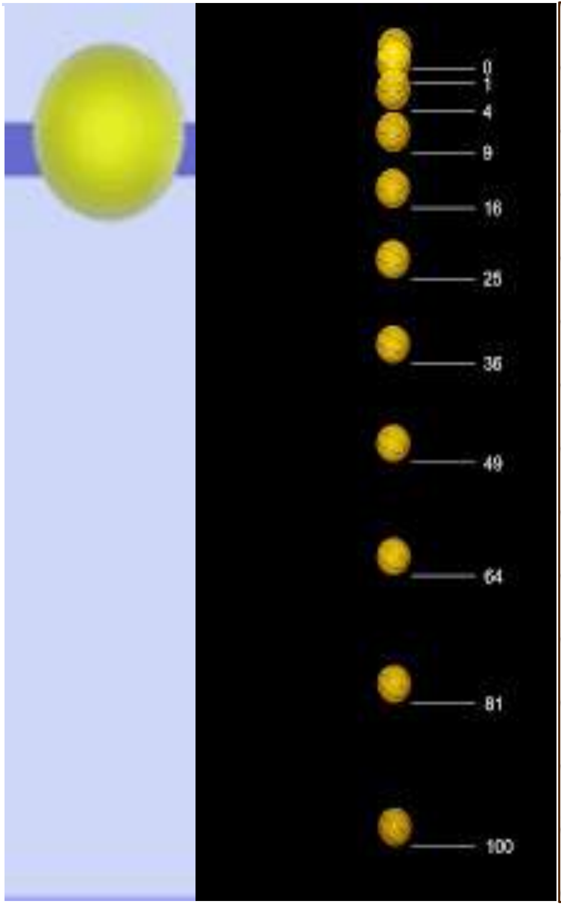




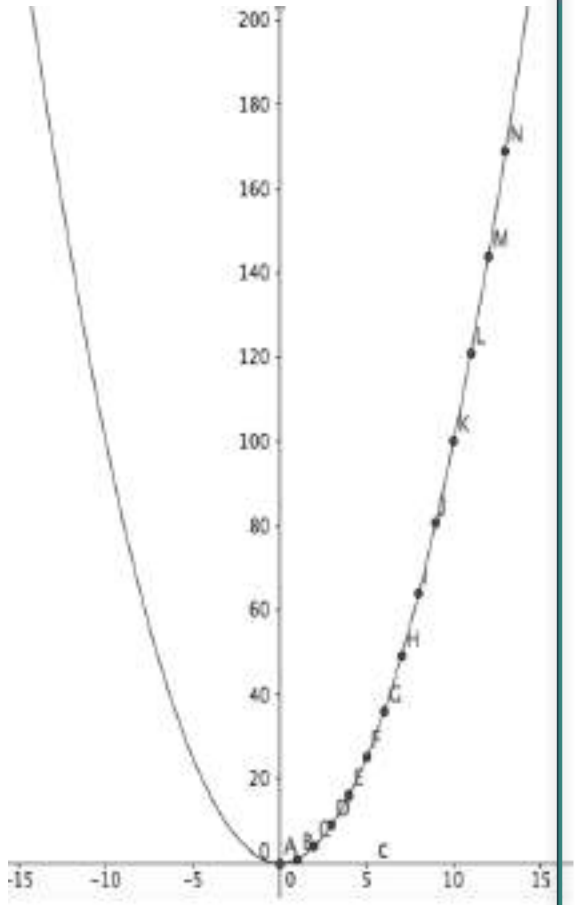


Anche nel caso delle funzioni, come generalmente nei diagrammi, la corrispondenza tra l'originale e il modello non è acquisita direttamente come effetto di una similitudine naturale (come avviene nelle analogie).

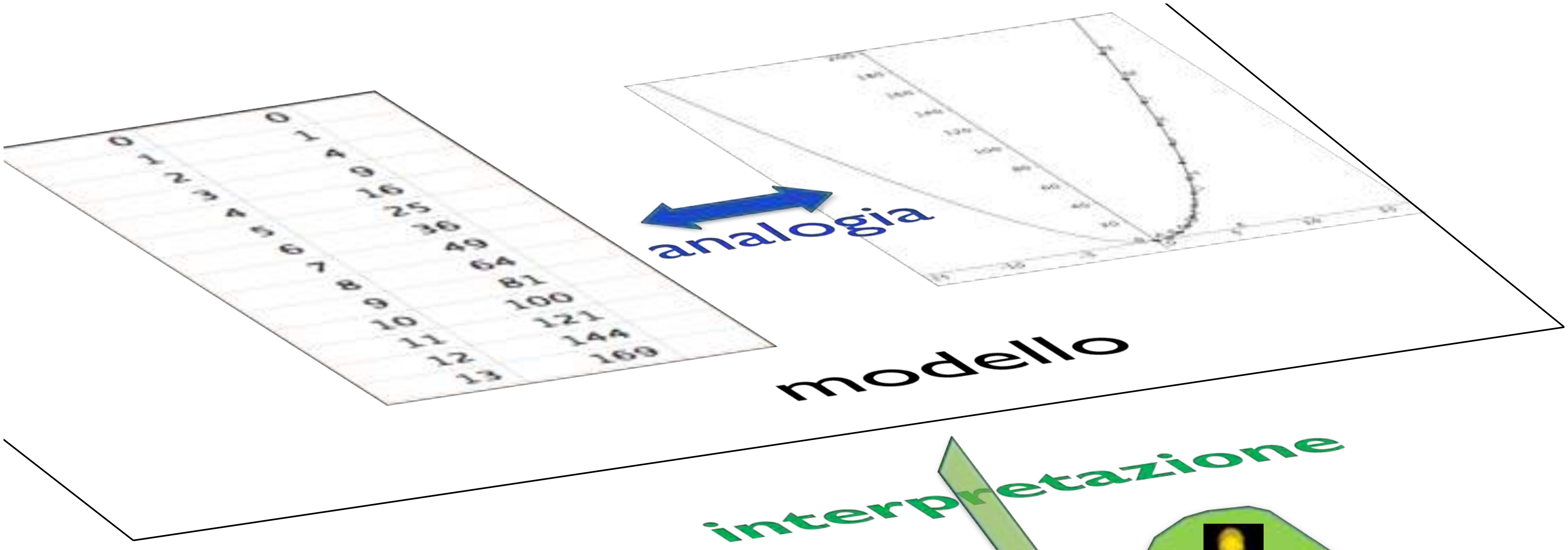
Se si considera, ad esempio, il grafico che rappresenta la relazione tra tempo e spazio nel caso della caduta dei gravi non esiste una somiglianza diretta e sensoriale tra il fenomeno della caduta e la forma del grafico.

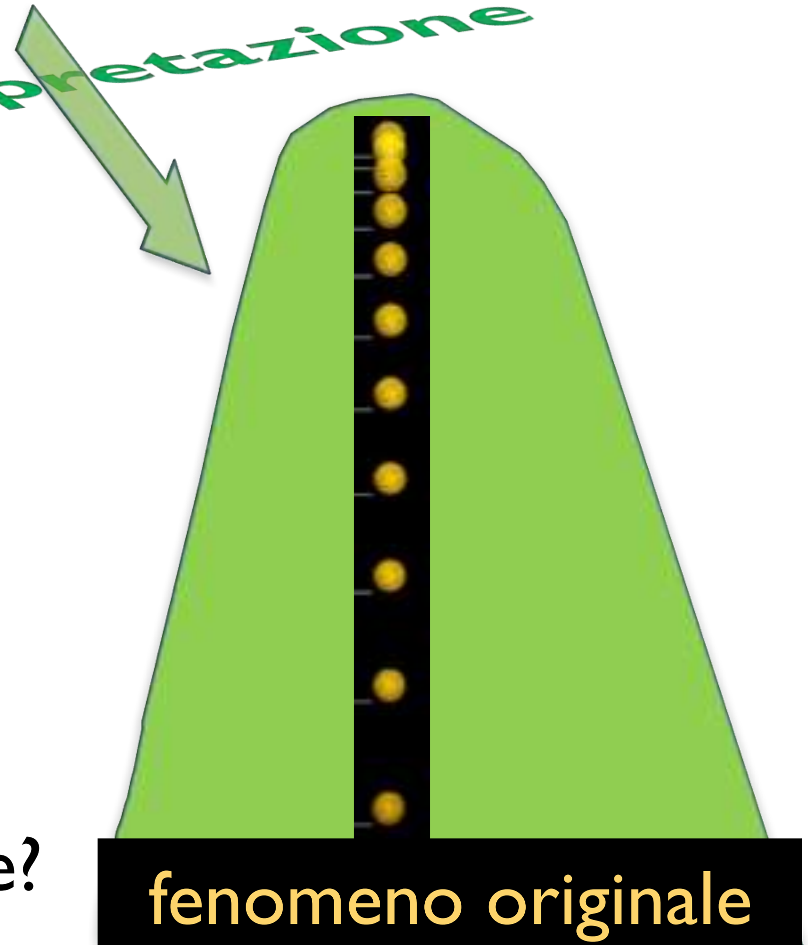


0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169



L'analogia è piuttosto tra l'espressione numerica del rispettivo fenomeno e la sua rappresentazione grafica (che è spaziale).

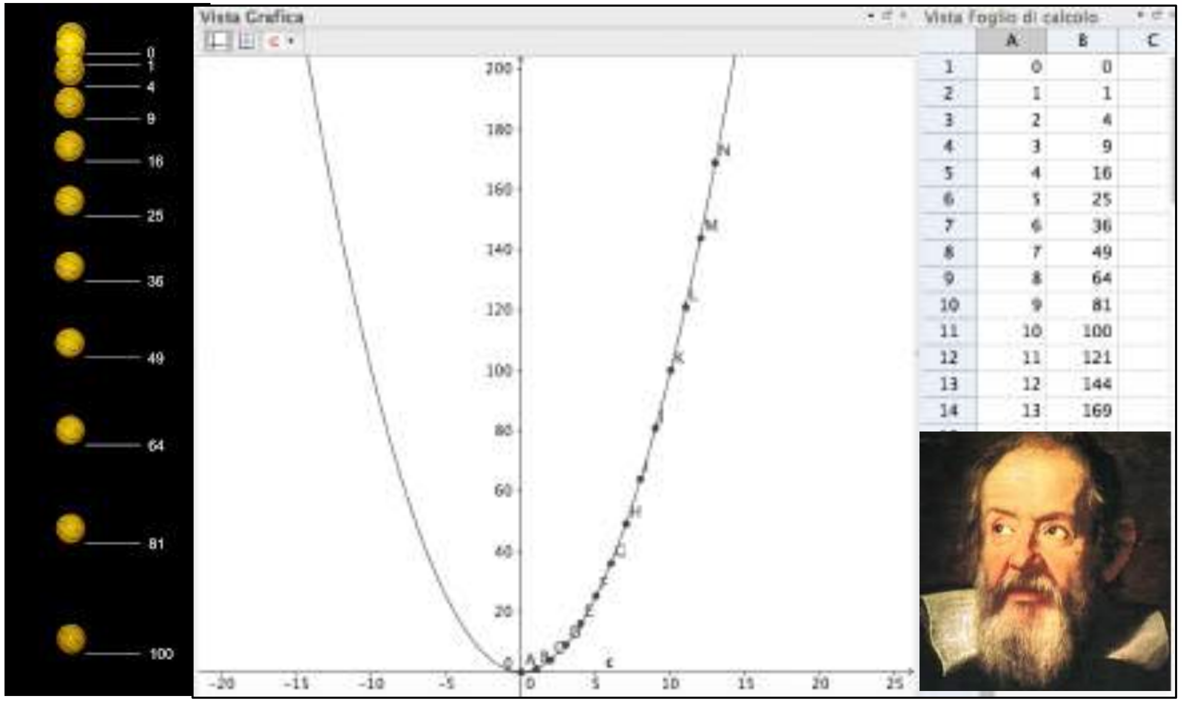




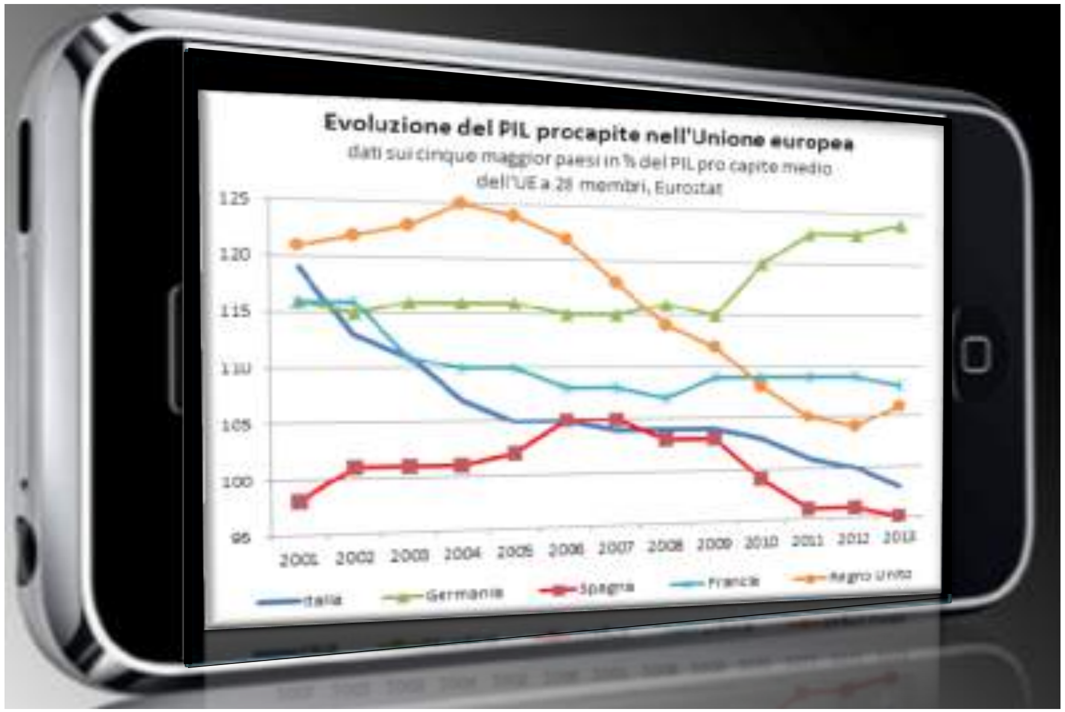
C’è un salto cognitivo ed epistemico tra i due (modello / fenomeno). Questo pone un problema didattico: come affrontare questo salto in classe?

Il problema didattico
può essere così precisato:

- Trovare un metodo didattico che renda il superamento del salto (epistemico e cognitivo) il più naturale possibile da un punto di vista cognitivo.
L’obiettivo è che il grafico diventi per gli allievi un dispositivo **intuitivo**: cioè che riescano a **fondere**, **interiorizzare** e **automatizzare**
il sistema delle
convenzioni relative
alla realtà
fenomenologica originale,
al sistema concettuale mediatore
(la funzione) e alla rappresentazione grafica.



Modellizzare il cambiamento: le **radici cognitive e culturali** della matematica e della scienza



Πάντα ρει

Fenomeni di cambiamento

Il correlativo cognitivo del **cambiamento** è l'attenzione a ciò che cambia, a come cambia e a ciò che rimane invariante in una situazione.

Il correlativo matematico del cambiamento è l'attenzione non solo ai **valori** quantitativi, al modo di **rappresentarli e manipolarli** per ragionarci, ma anche a come cambiano le loro **differenze** ("fa caldo", "ora fa più caldo di prima", "fa sempre più caldo").

Apprendistato all'interpretazione dei grafici di funzione

Occorre che gli allievi siano introdotti a un apprendistato nell'interpretazione dei grafici in vari campi di esperienza in cui si esperiscano significativi fenomeni di **cambiamento**:

1

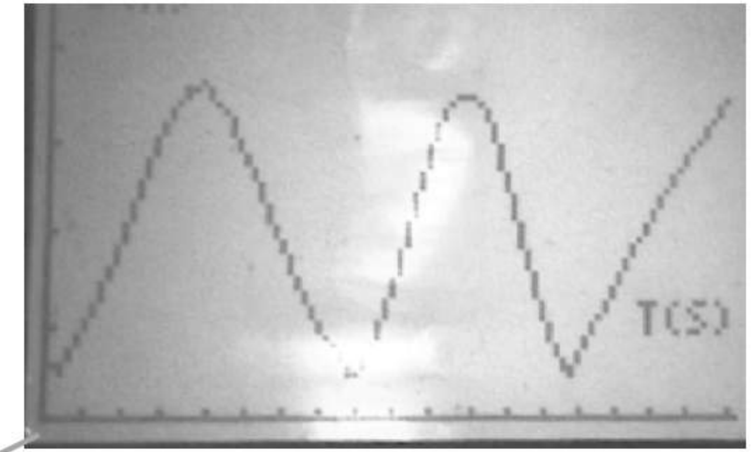
- Movimento
- Crescita (decrescita) in situazioni varie:
  - Piante
  - Persone
  - Temperatura
  - Prezzi
  - …

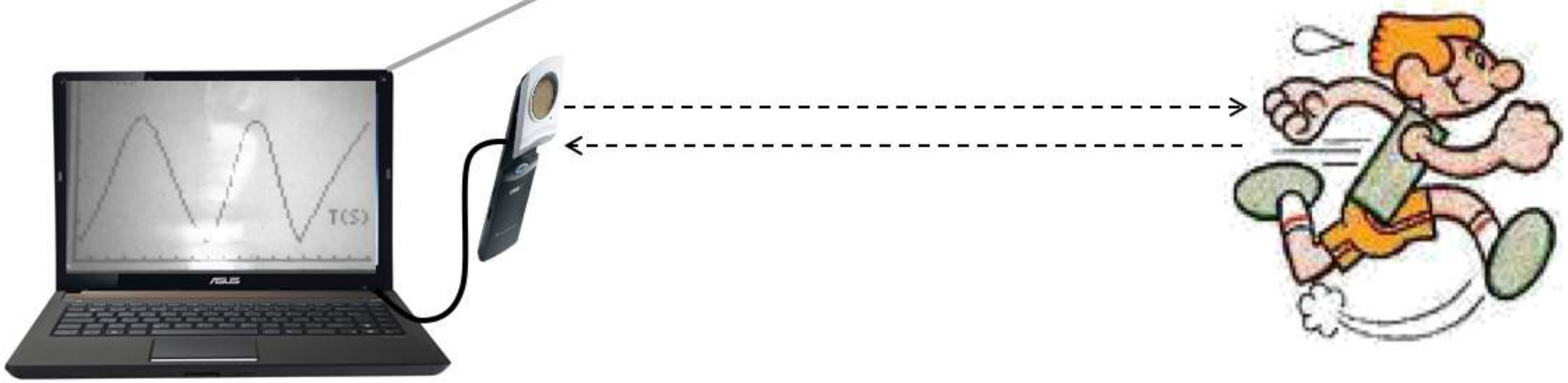
Rappresentare il movimento

Esempio 4

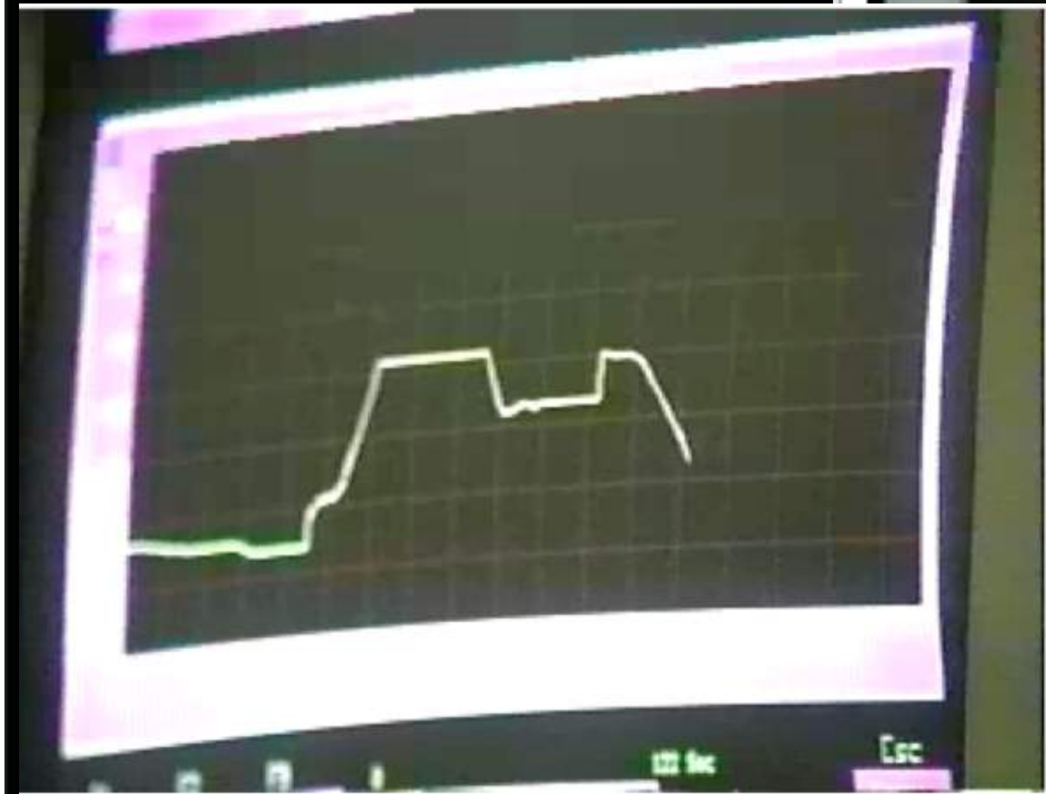
Il CBR

(rivelatore sonico di movimento)





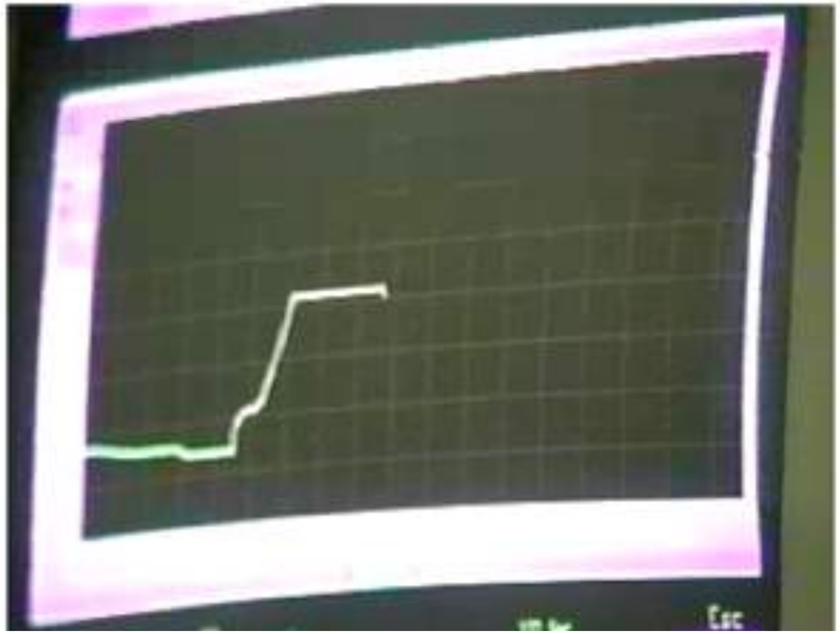
Eleanor



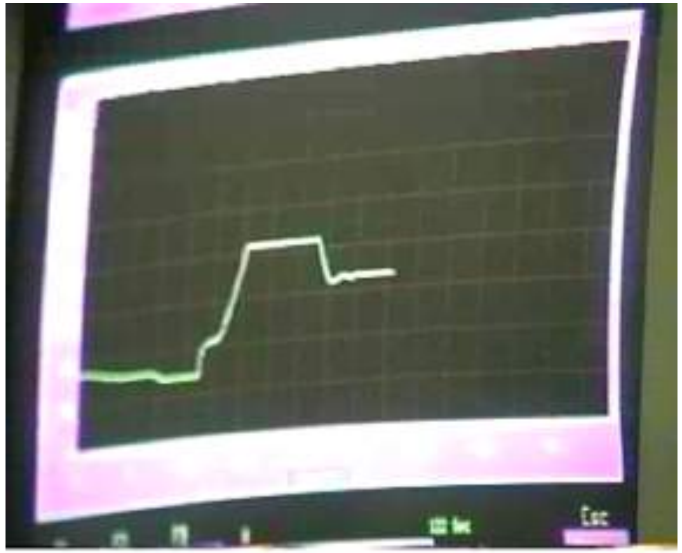
Nemirovski et al. (1998), Arzarello (2004)

EPISODIO 1

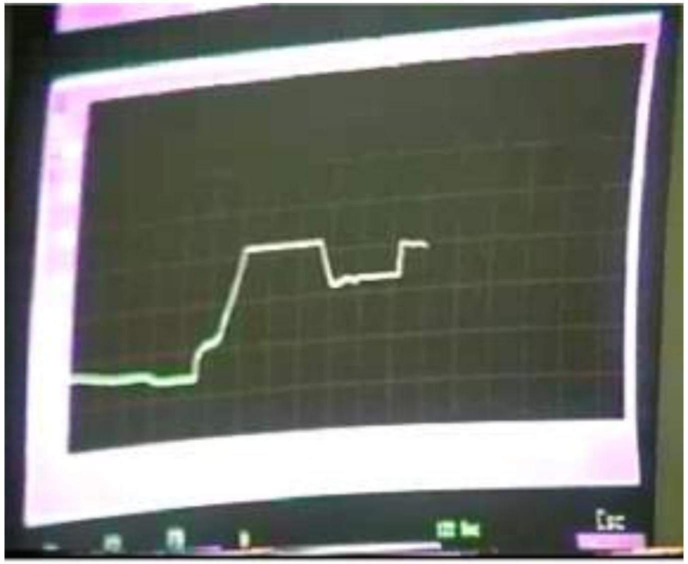
1. Maestra: "Ecco come funziona. Clicco F1 per iniziare, e puoi spostarlo.
... E risponderà alla torre. Così..."
[Eleanor sposta il dispositivo con il braccio su, giù, a destra, a sinistra e osserva cosa succede sullo schermo]
2. E: "Ora mi allontano" [E si allontana lentamente guardando sempre allo schermo per vedere che cosa succede durante il suo movimento]
3. [Ad un certo punto il grafico blocca il suo aumento e si ha una linea orizzontale]



E: "Se lo sposto ... forse questo è il più lontano possibile"
E: "Cosa succede se lo sposto più in alto?"
[E va un po 'in avanti poi solleva il dispositivo rimanendo ferma (la linea rimane orizzontale: figura).

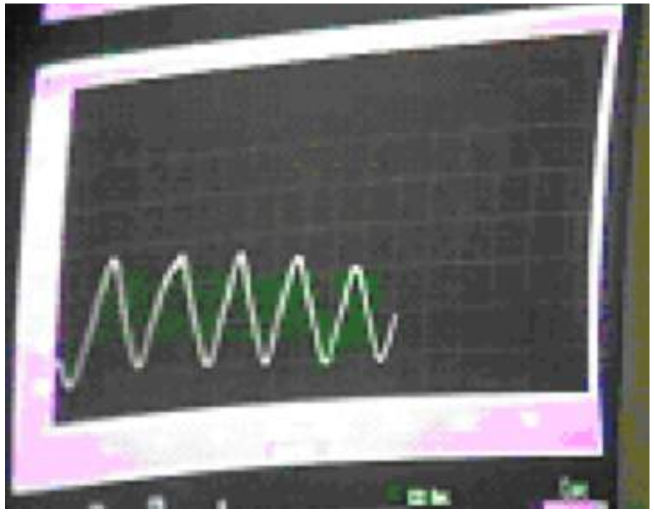


Va un po 'indietro e solleva ancora il dispositivo rimanendo immobile (figura);



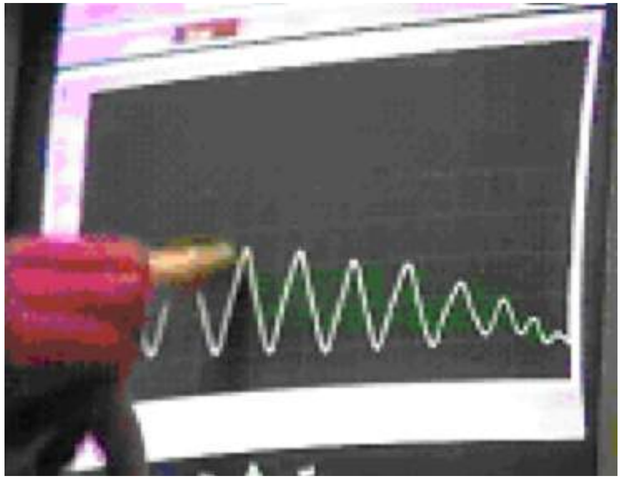
Poi va verso la torre "Più si va vicino alla torre, più [la linea] è bassa, penso"
[E si allontana di nuovo lentamente guardando lo schermo: figura]
...

4. E: "OK, cercherò di fare un disegno regolare (pattern)".
[E va avanti e indietro regolarmente e produce il grafico della figura a fianco]
E: "In realtà questo non è esattamente sempre uguale".



EPISODIO 2

5. M: "Fermiamoci e lo guardiamolo per un minuto". [E segue con attenzione il grafico sullo schermo con l'indice: figura]



6. M: "Cosa stava succedendo?"

7. E: "Beh, mi allontanavo: andavo più lontano, e poi più vicino e poi ancora ancora lontano".

[Ripete con il braccio avanti e indietro il movimento che aveva fatto con il suo corpo]

E: "stavo veramente andando così, ma un po' cambiavo".

8. M: "Allora la linea in su era quando stavi camminando ...?"
[M punta la linea sullo schermo]
9. E: "Quando stavo camminando all'indietro, e la linea in avanti era così".
10. M: "E poi tutto ... l'intera cosa ha anche una sorta di forma, vero?"
11. E: "Sì, è tutto ...
[E abbassa la testa per guardare di nuovo le diverse parti del grafico; segue di nuovo il grafico con l'indice]
... come degli zig-zag da quella parte, ma voglio dire che sono tutti ... si rassomigliano, tipo montagne o qualcosa del genere ".

EPISODIO 3

- 12. E: "Vediamo ... mi chiedo se si riesce a farla andare dritta in su?"
[Segue il grafico molto veloce con l'indice]
13. E: "Non in diagonale. Probabilmente non si può perché se dovesse andare dritto, dovrebbe essere nello stesso momento, perché si muove così [lei mette con la mano un movimento orizzontale sullo schermo attraverso il grafico], non importa quello che fai "

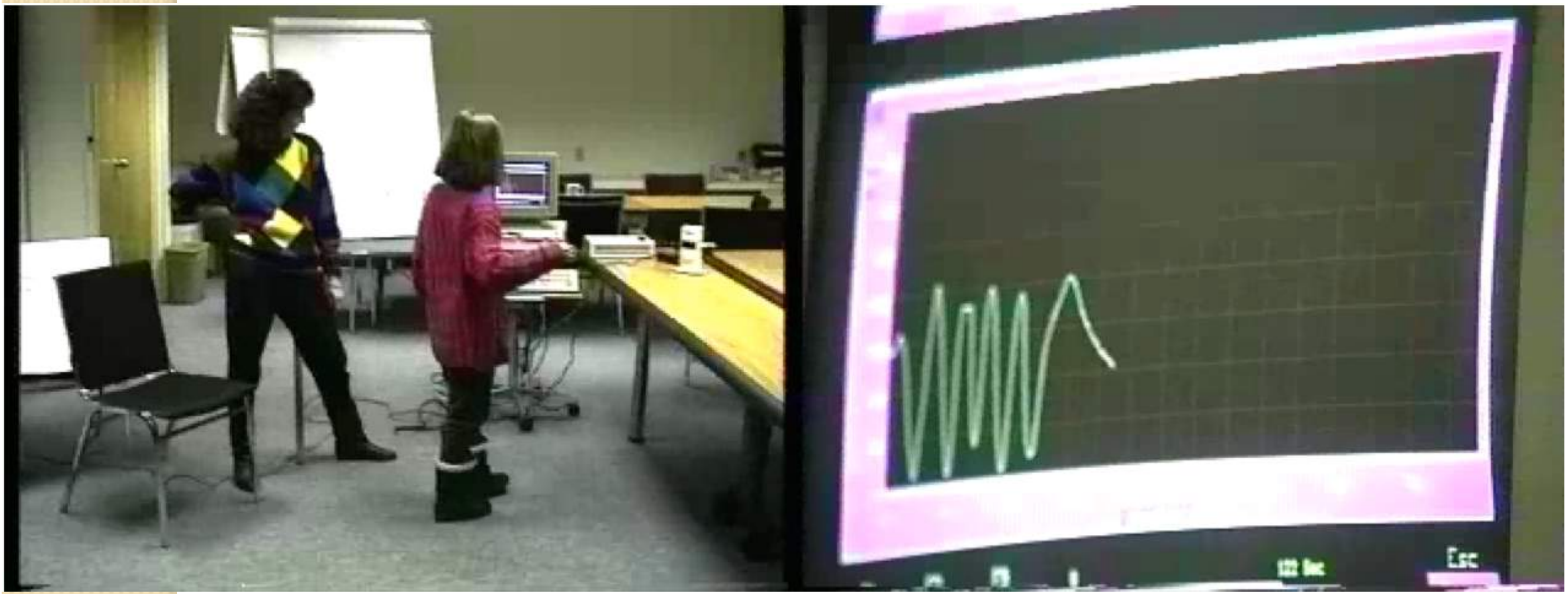
14. I: "D'accordo, ... si muove nel tempo?"
15. E: "Sì. Quindi dovresti fermare il tempo e andare così. [Con il braccio teso, E punta l'indice allo schermo e produce la forma del grafico sullo schermo]
E muoversi così. [E si muove all'indietro e accenna il movimento che aveva fatto in precedenza]
Perché, perché si muove in quella direzione [way] o in questa nello stesso tempo ".
16. E: "Sta andando in questo modo. Così va bene, invece di andare solo così ...[E fa un movimento verticale sullo schermo con l'indice]...va probabilmente in questo modo".
[E fa un movimento obliquo lento sullo schermo con l'indice]

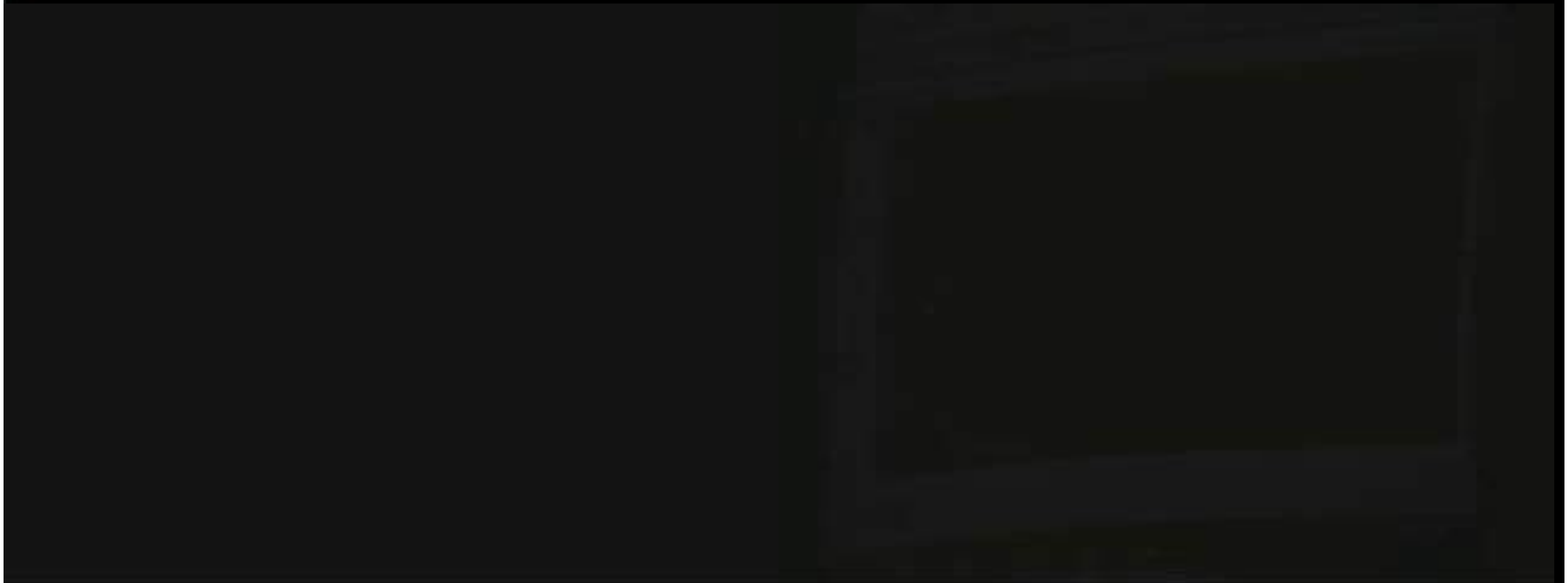
EPISODIO 4

17. I: "Pensi di poter fare una linea più inclinata di questa? Forse non puoi farla dritta in su ma forse puoi farla un po '... "
18. E: "Può essere, forse se lo faccio più veloce".
19. I: "Ok, lo proviamo?"

19. I: "Ok, lo proviamo?"
20. E: "Non mi preoccupo della forma..."

- [Prima E corre due volte avanti e indietro, poi si ferma e continua a muovere solo il braccio avanti e indietro due volte ...]
"... e se ti muovi lentamente"
[Corre di nuovo ma molto lentamente ...]





R. Nemirovsky con altri (ad es. in Italia: F. Arzarello, F.Ferrara, O. Robutti, C. Sabena, K.Savioli) ha elaborato la nozione di **fusione** per spiegare come l'interazione degli allievi con opportuni strumenti e un'opportuna orchestrazione didattica nella conduzione da parte dell'insegnante può fare evolvere il parlato, le azioni e i gesti degli allievi stessi in modo che riescano a **fondere** le proprietà dei simboli e quelle degli eventi o situazioni che queste rappresentano: in altre parole come essi siano in grado di pianificare i loro movimenti in maniera tale da creare e interpretare i grafici con azioni cinestetiche.

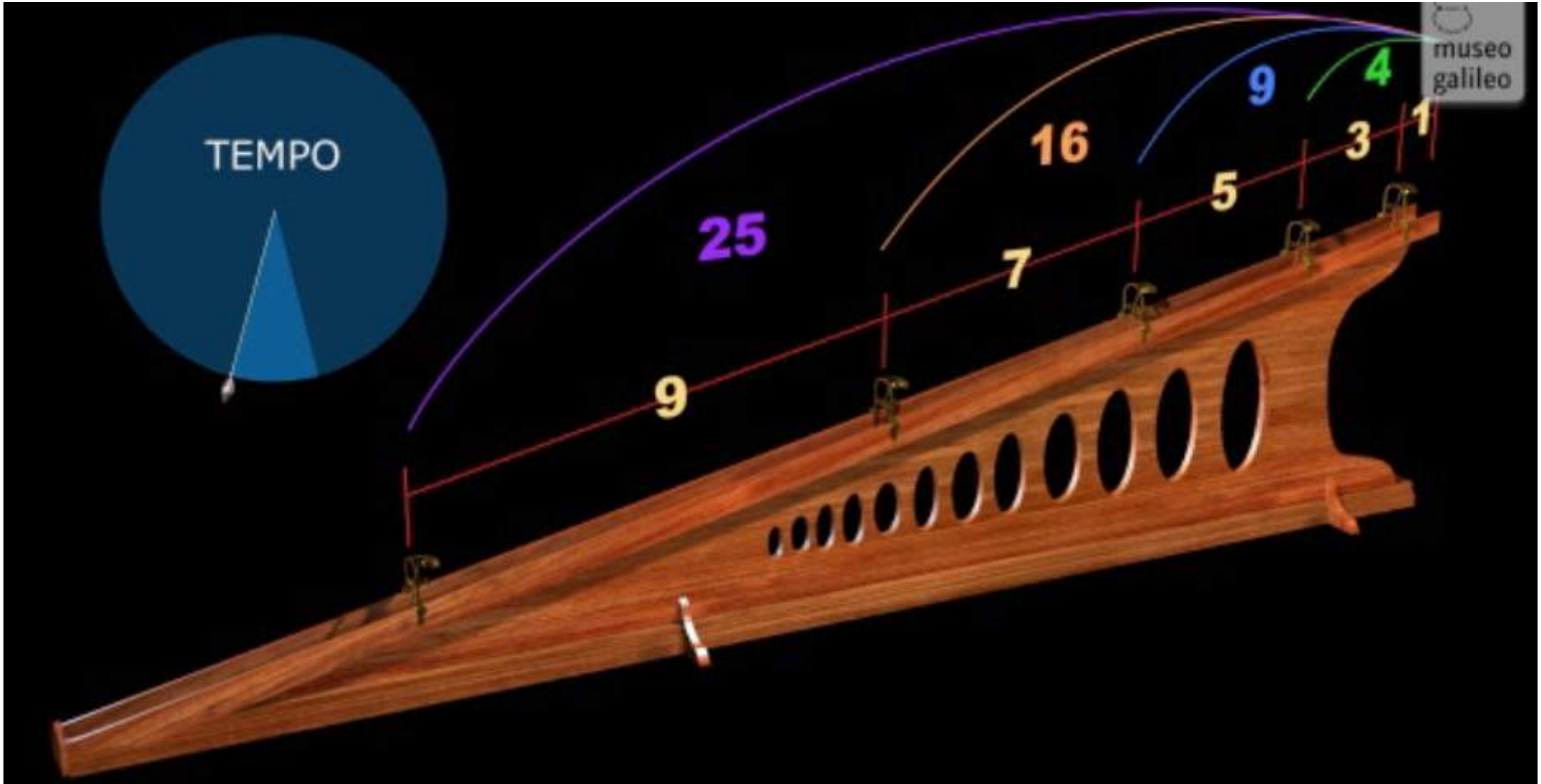
Esempio 5 Il primo esperimento scientifico moderno (1604)

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Sensate esperienze
e dimostrazioni matematiche

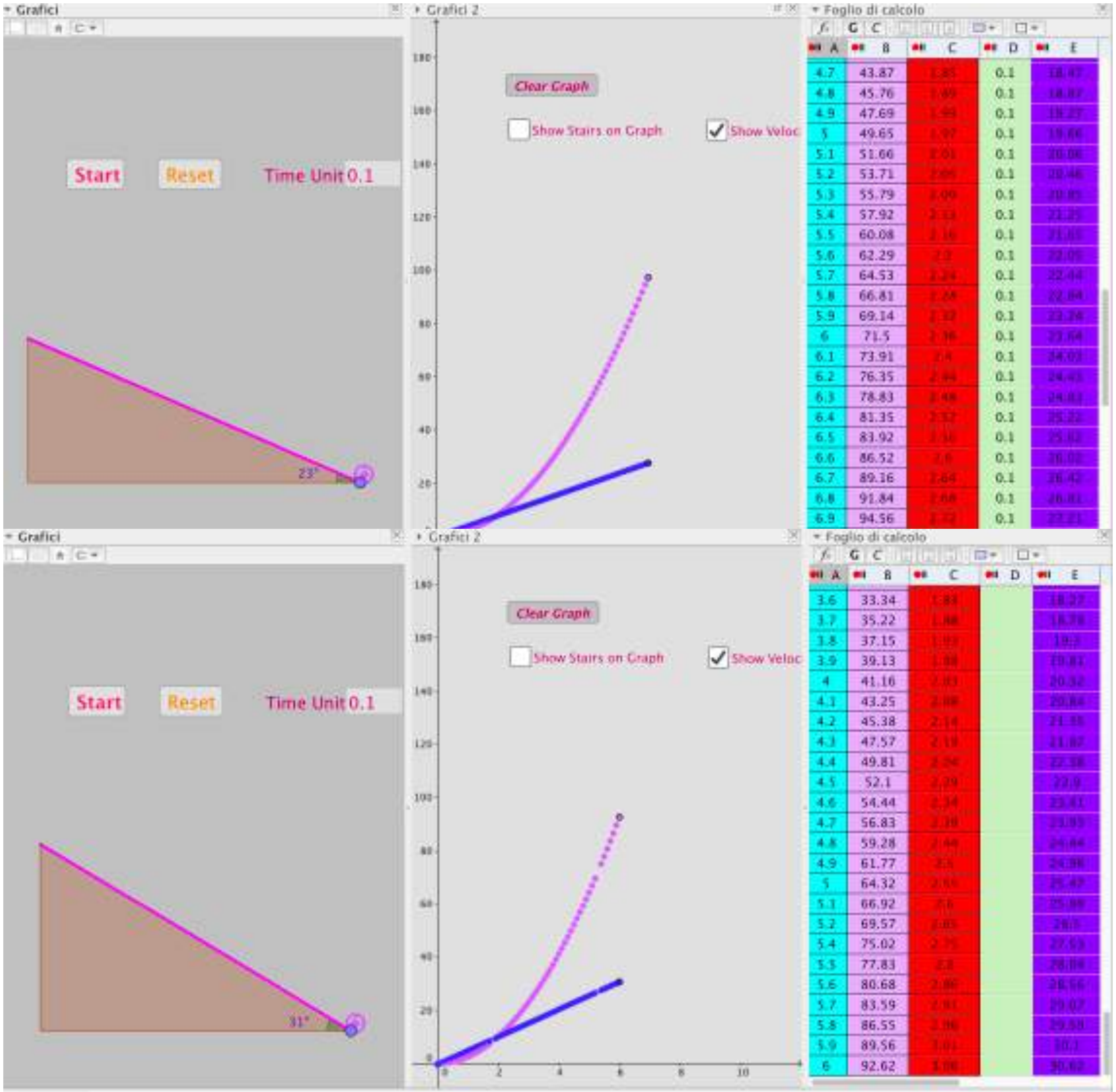
http://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html



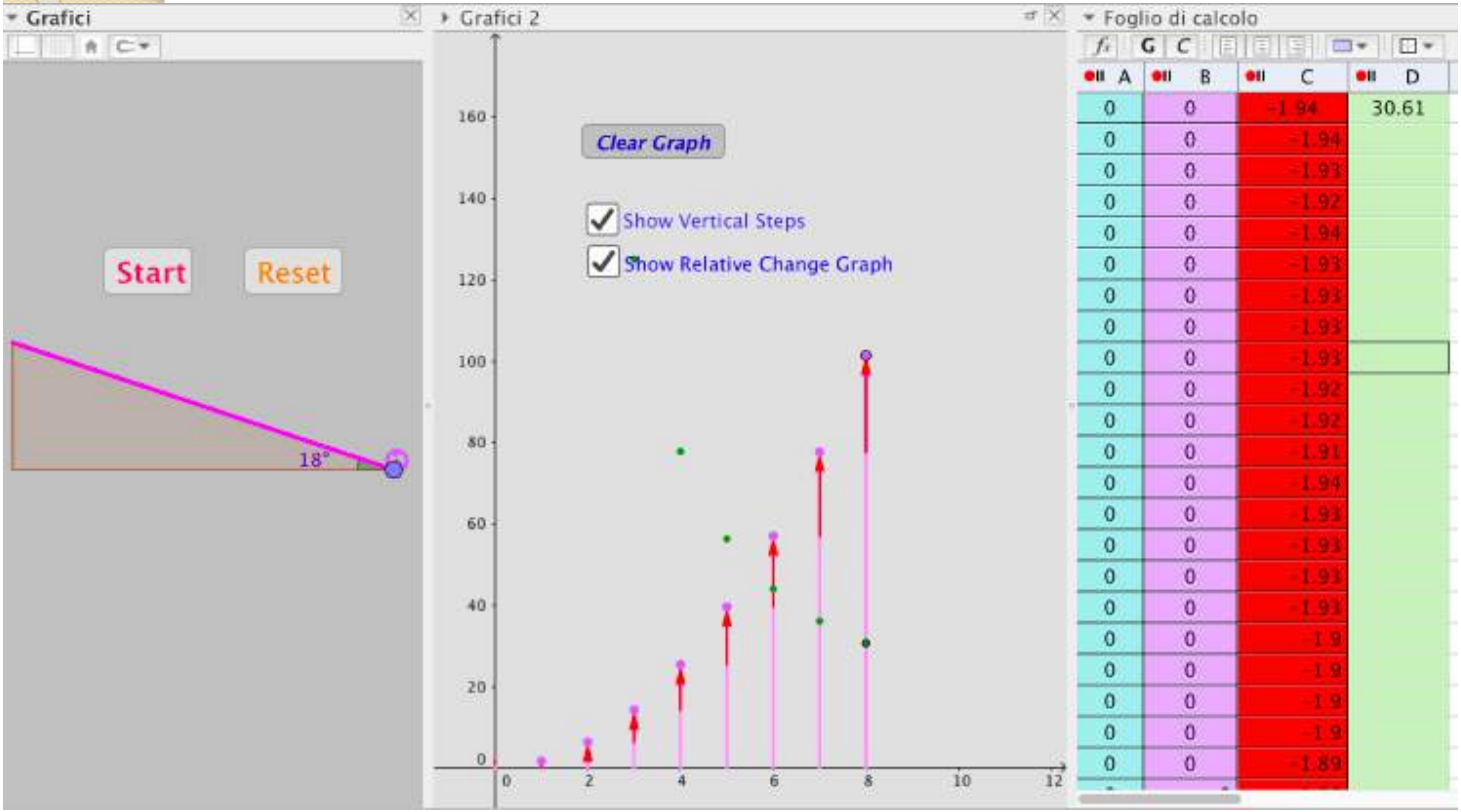
Si conclude che:

- alla base del piano inclinato il corpo ha sempre la stessa velocità indipendentemente dall’inclinazione e dalla lunghezza del piano.
- in altre parole, la velocità raggiunta alla base del piano inclinato dipende dalla quota alla quale il corpo si trova inizialmente.

Quindi anche in caduta libera avrà la stessa velocità.



Grafici
Start
Reset
Time Unit 0.1
23°
Grafici 2
Clear Graph
Show Stairs on Graph
Show Veloc
Foglio di calcolo
Grafici
Start
Reset
Time Unit 0.1
31°
Grafici 2
Clear Graph
Show Stairs on Graph
Show Veloc
Foglio di calcolo


Grafici
Start
Reset
18°
Grafici 2
Clear Graph
Show Vertical Steps
Show Relative Change Graph
Foglio di calcolo
A
B
C
D
30.61

Apprendistato all'interpretazione dei grafici di funzione

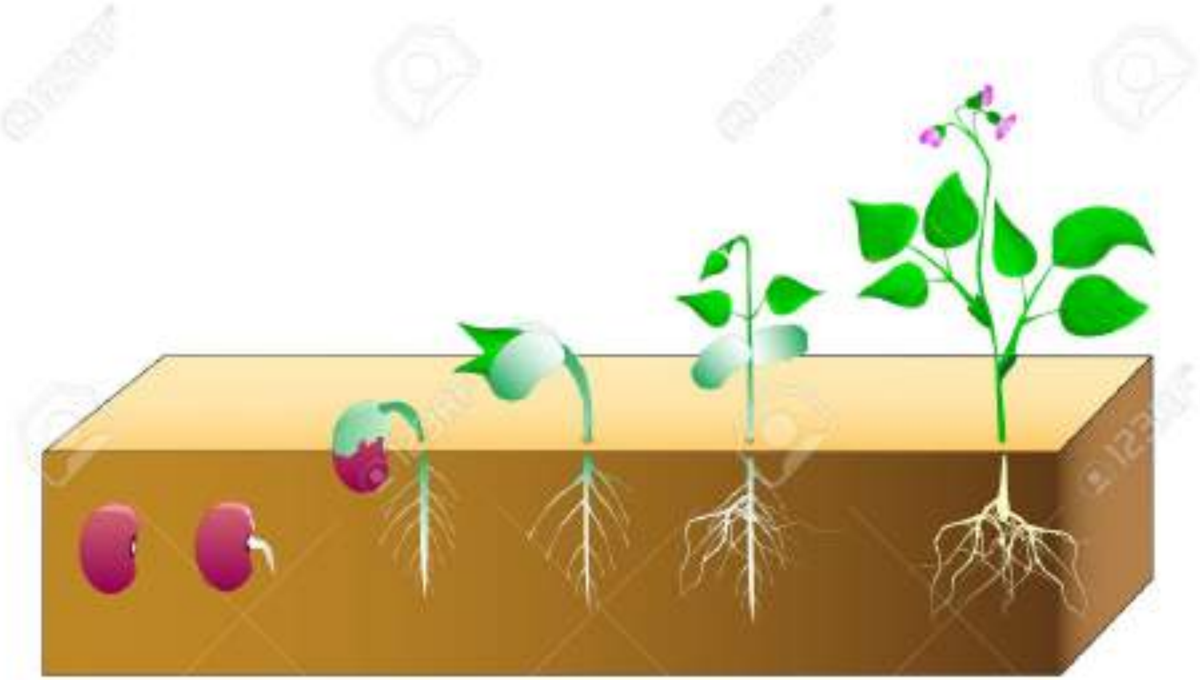
Occorre che gli allievi siano introdotti a un apprendistato nell'interpretazione dei grafici in vari campi di esperienza in cui si esperiscano significativi fenomeni di **cambiamento**:

- Movimento
- Crescita (decrescita) in situazioni varie:
    - Piante
    - Temperatura
    - Prezzi
    - Persone
    - …

2

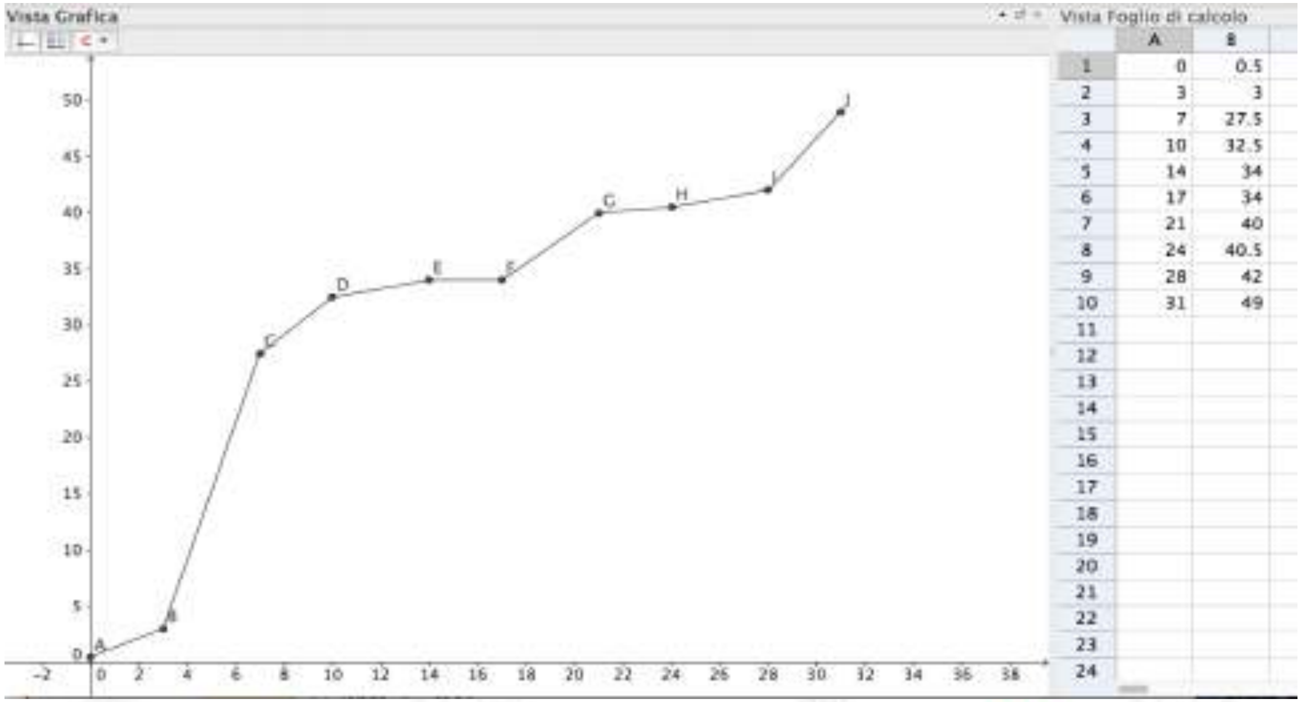
Esempio 6: crescita delle piante di fagioli

	sabbia	t.
lun 31/1/00	0,5	
gio 3/2/00	3	
lun 7/2/00	27,5	
gio 10/2/00	32,5	
lun 14/2/00	34	
gio 17/2/00	34	
lun 21/2/00	40	
gio 24/2/00	40,5	
lun 28/2/00	42	
gio 2/3/00	49	

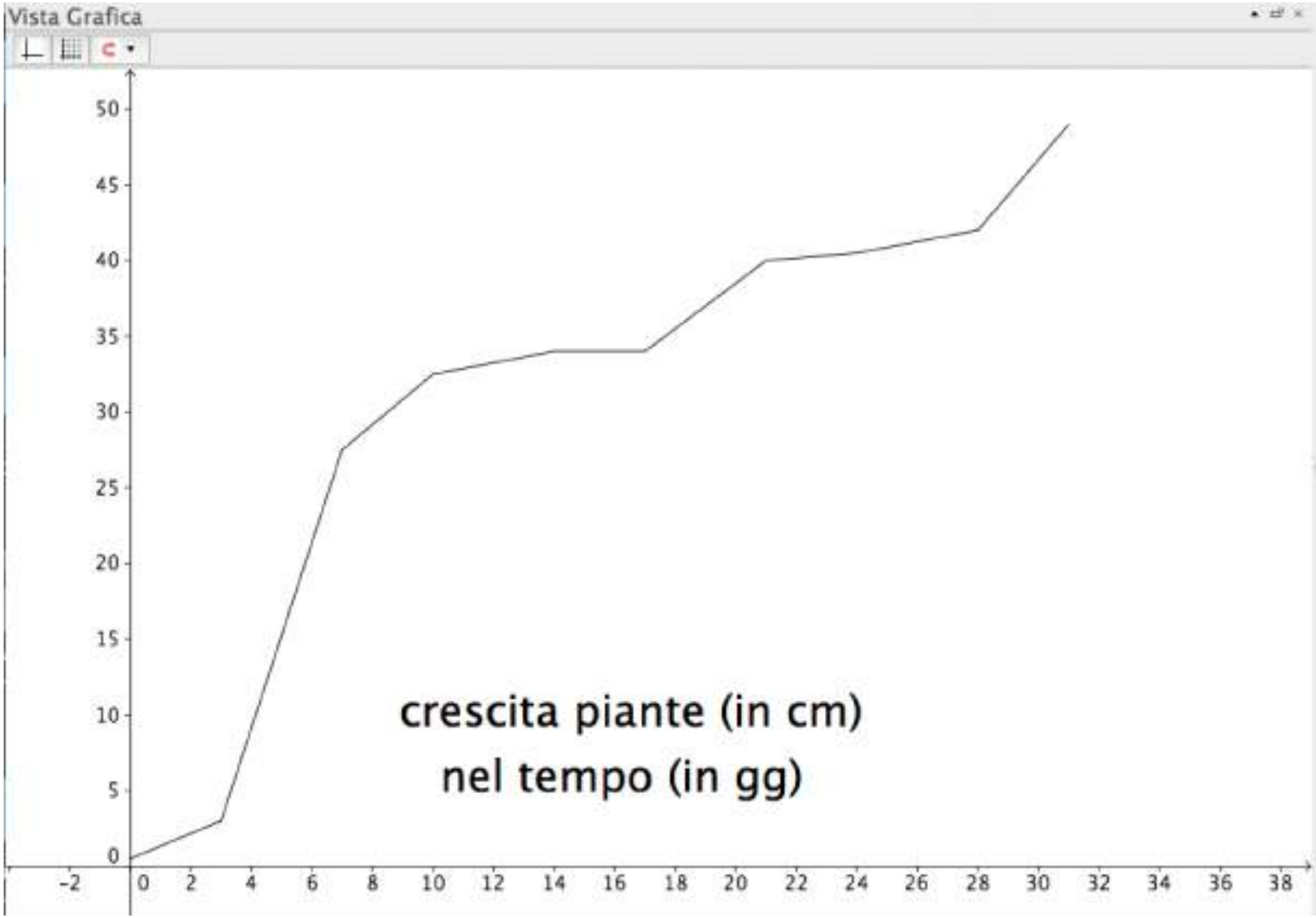


Crescita delle piante di fagioli

	sabbia	t.
lun 31/1/00	0,5	
gio 3/2/00	3	
lun 7/2/00	27,5	
gio 10/2/00	32,5	
lun 14/2/00	34	
gio 17/2/00	34	
lun 21/2/00	40	
gio 24/2/00	40,5	
lun 28/2/00	42	
gio 2/3/00	49	



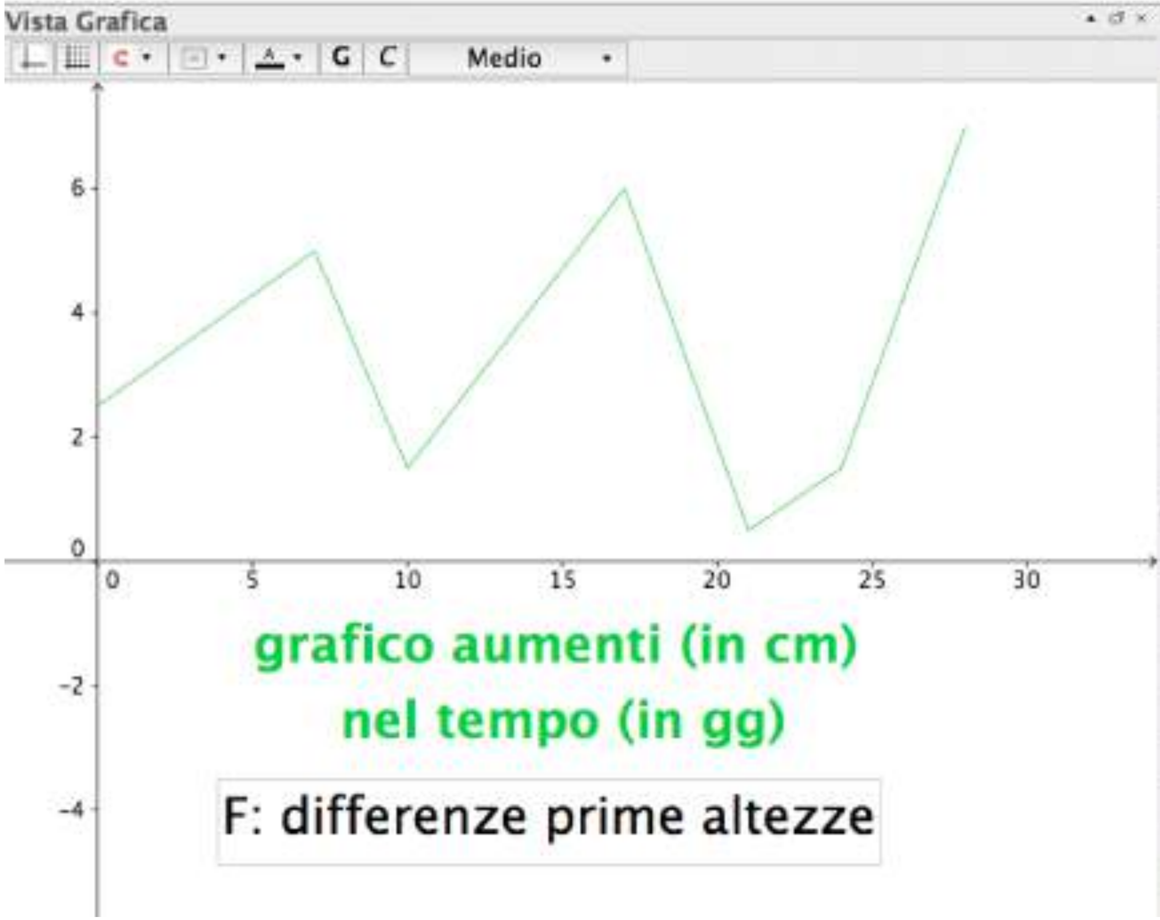
Crescita delle piante di fagioli



Vista Foglio di calcolo

	A	B
1	0	0.5
2	3	3
3	7	27.5
4	10	32.5
5	14	34
6	17	34
7	21	40
8	24	40.5
9	28	42
10	31	49
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

Crescita delle piante di fagioli



Vista Foglio di calcolo

	A	B	C	D	E	F
1	0	0.5	2.5	3	0	2.5
2	3	3	24.5	4	3	24.5
3	7	27.5	5	3	7	5
4	10	32.5	1.5	4	10	1.5
5	14	34	0	3	14	0
6	17	34	6	4	17	6
7	21	40	0.5	3	21	0.5
8	24	40.5	1.5	4	24	1.5
9	28	42	7	3	28	7
10	31	49				
11		0				
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						

Esempio 7
Temperature e umidità

Si veda a livello introduttivo: Il significato di grado sul termometro
(Mat. 2001, Argomentare)

7:30

8:00

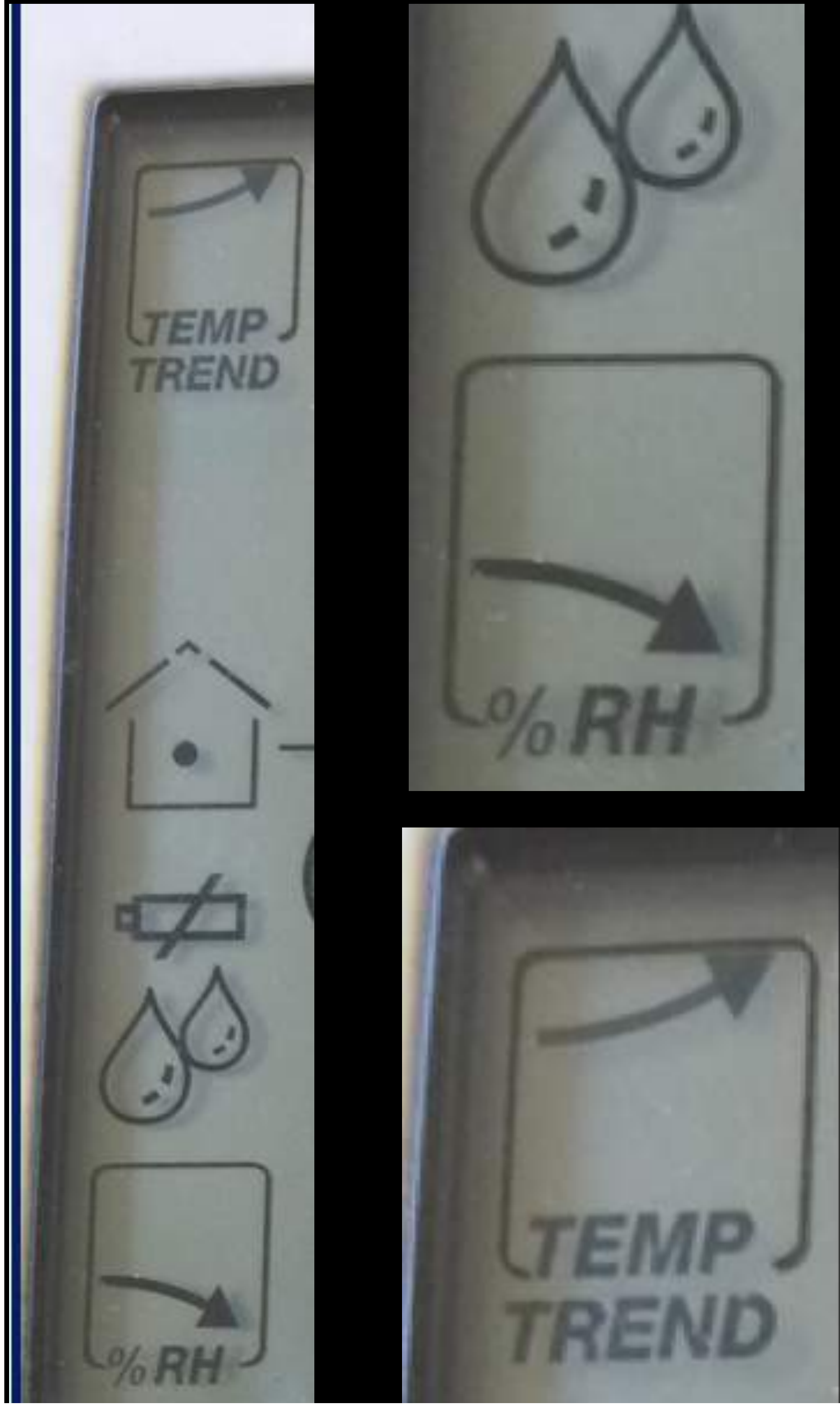
8:30

9:00

10:00

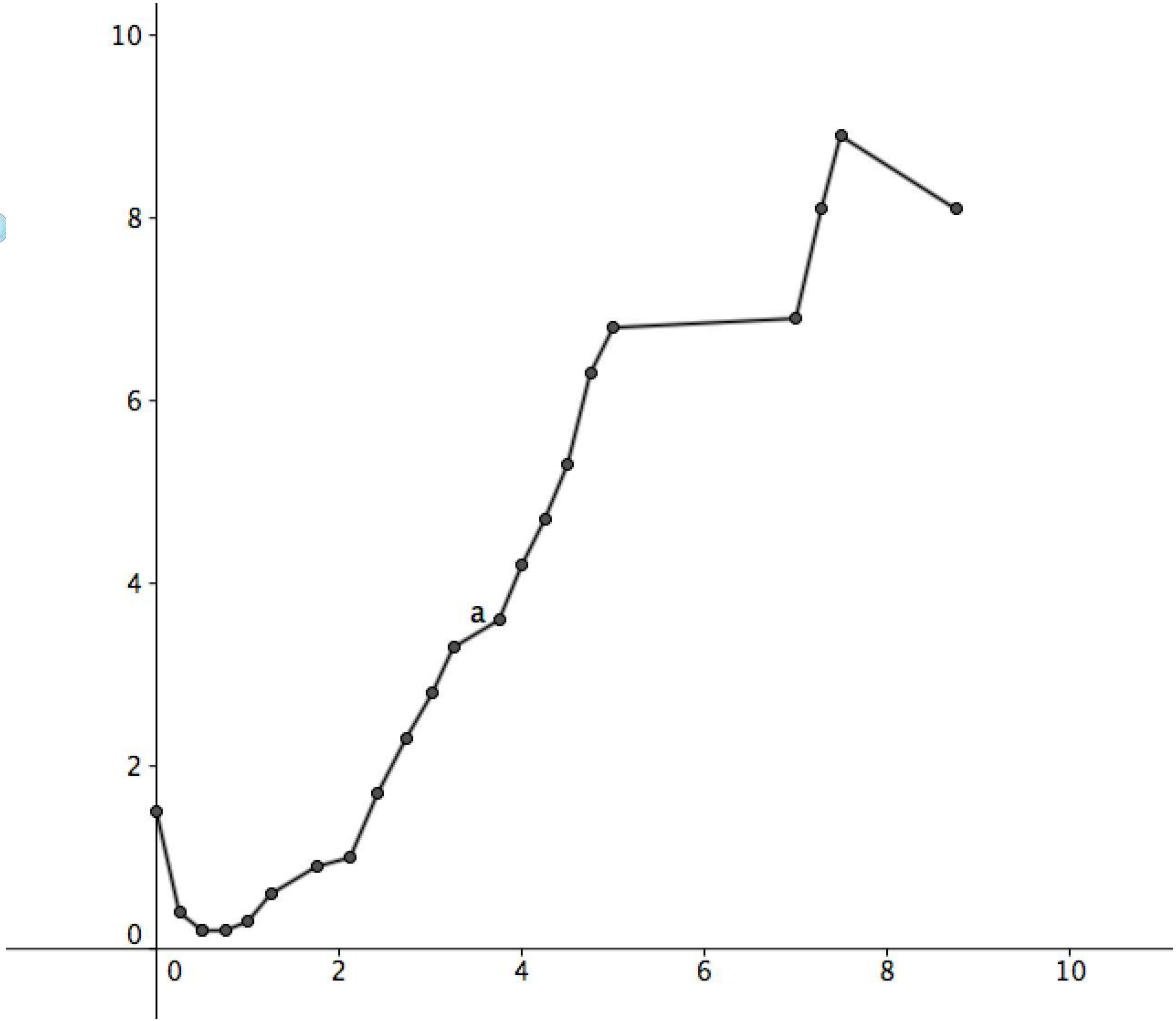
11:00

Che cosa rappresentano le frecce?

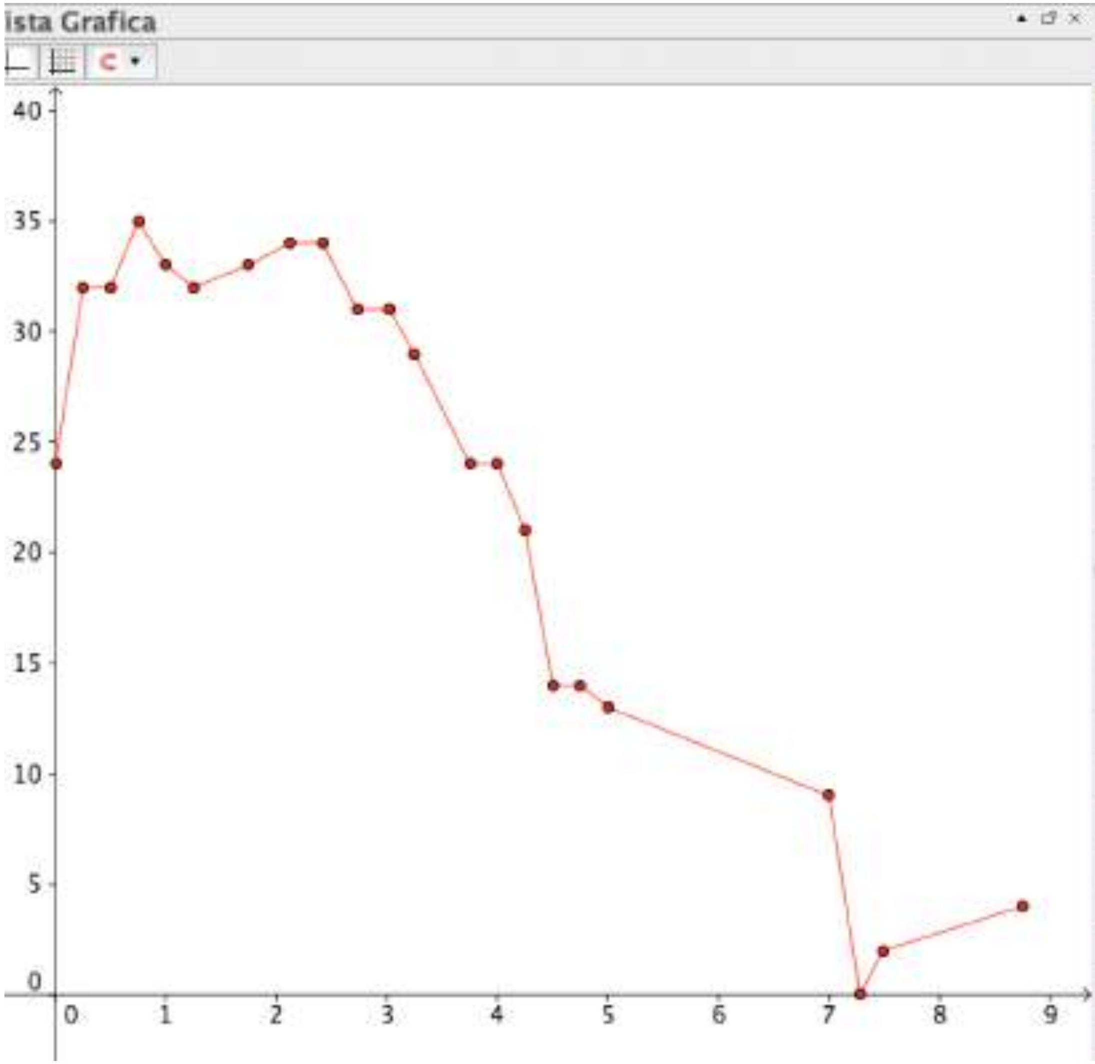


Temperature e umidità

ORA	Gradi Celsius C°	Umid. Relativa %	Indice Humidex	ORA	Gradi Celsius C°	Umid. Relativa %	Indice Humidex
7:15	18,5	74		7:15	21,3	64	
7:30	17,4	82		7:30	19,1	71	
7:45	17,2	82		7:45	18,4	77	
8:00	17,2	85		8:00	18,3	80	
8:15	17,3	83		8:15	18,6	81	
8:30	17,6	82		8:40	19,2	81	
9:00	17,9	83		9:05	20,2	82	
9:22	18,0	84		9:15	20,6	81	27
9:40	18,7	84		9:30	21,3	78	27
9:58	19,3	81		9:45	22,2	72	27
10:16	19,8	81		10:37	22,8	70	28
10:30	20,3	79		10:00	24,8	62	30*
11:00	20,6	74	26	11:10	26,4	54	31*
11:15	21,2	74	26	11:45	26,3	55	31*
11.30	21,7	71	27	16:45	27,7	38	28,5
11.45	22,3	64	26				
12:00	23,3	64	28,5				
12:15	23,8	63	28,5				
14:15	23,9	59	28				
14:32	25,1	50	30*				
14:44	25,9	52	30*				
18:00	25,1	54	28				

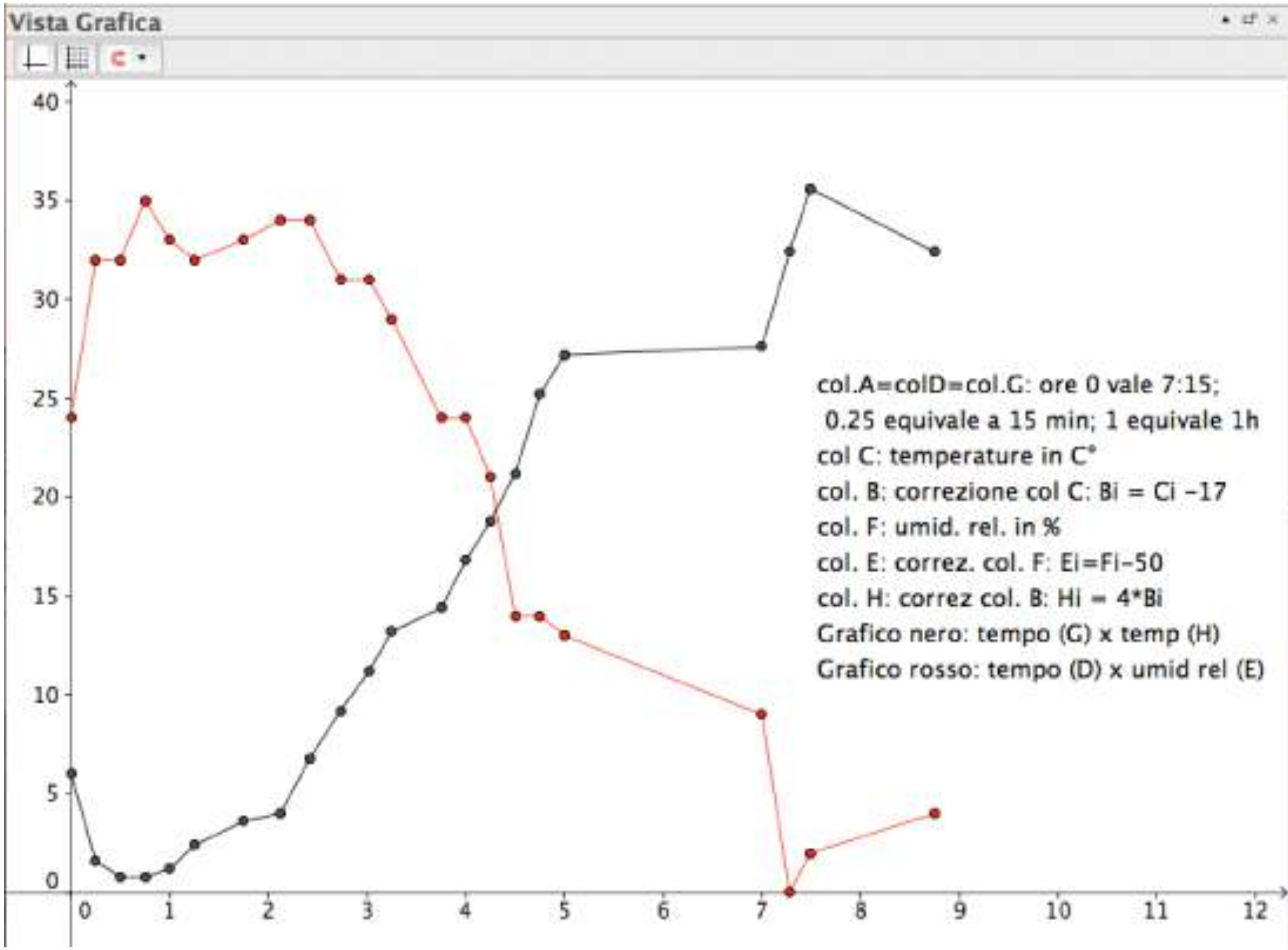


10
8
6
4
2
0
a
0
2
4
6
8
10



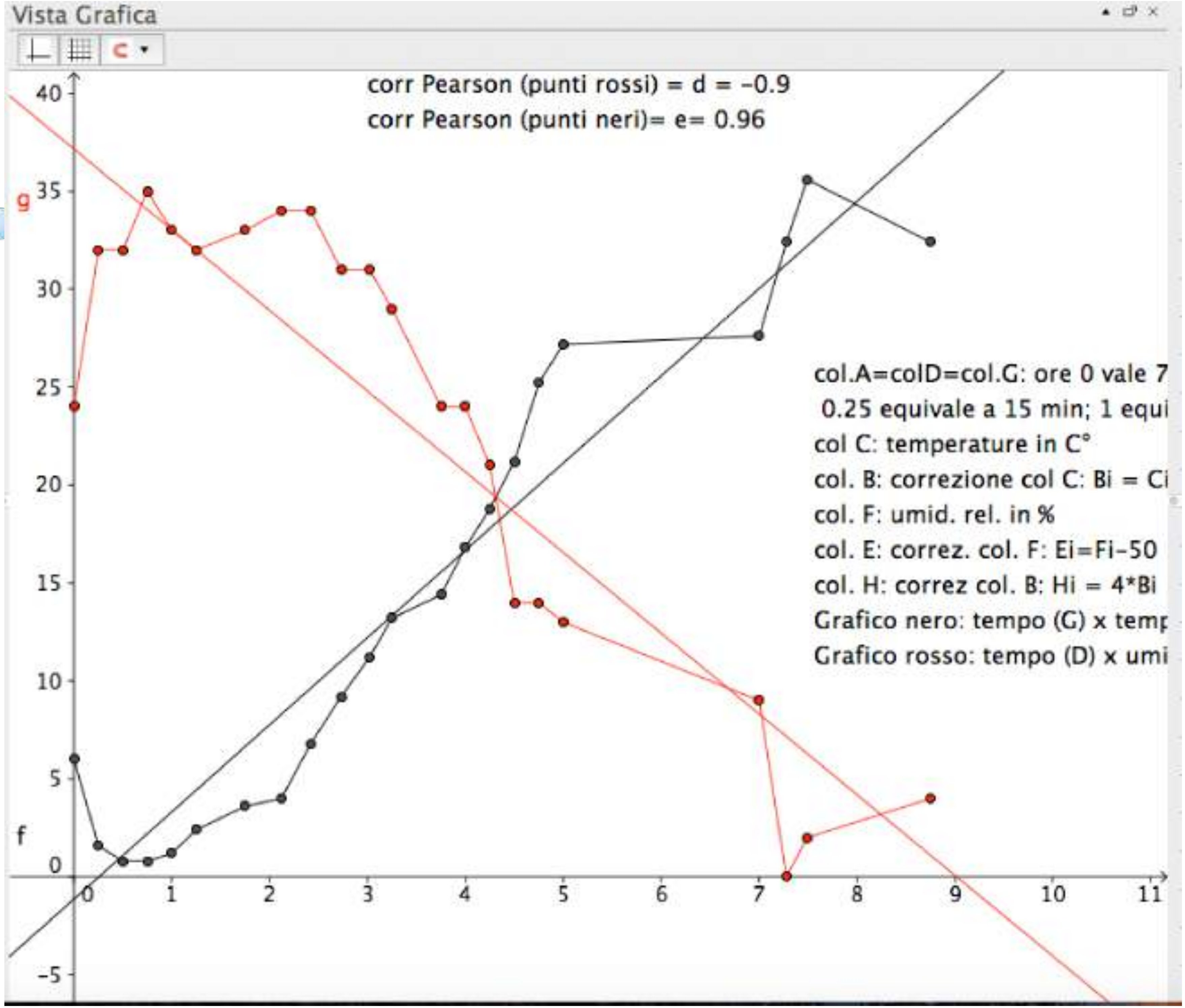
Vista Foglio di calcolo

	A	B	C	D	E	F
1	0	1.5	18.5	0	24	74
2	0.25	0.4	17.4	0.25	32	82
3	0.5	0.2	17.2	0.5	32	82
4	0.75	0.2	17.2	0.75	35	85
5	1	0.3	17.3	1	33	83
6	1.25	0.6	17.6	1.25	32	82
7	1.75	0.9	17.9	1.75	33	83
8	2.12	1	18	2.12	34	84
9	2.42	1.7	18.7	2.42	34	84
10	2.73	2.3	19.3	2.73	31	81
11	3.02	2.8	19.8	3.02	31	81
12	3.25	3.3	20.3	3.25	29	79
13	3.75	3.6	20.6	3.75	24	74
14	4	4.2	21.2	4	24	74
15	4.25	4.7	21.7	4.25	21	71
16	4.5	5.3	22.3	4.5	14	64
17	4.75	6.3	23.3	4.75	14	64
18	5	6.8	23.8	5	13	63
19	7	6.9	23.9	7	9	59
20	7.28	8.1	25.1	7.28	0	50
21	7.49	8.9	25.9	7.49	2	52
22	8.75	8.1	25.1	8.75	4	54
23						

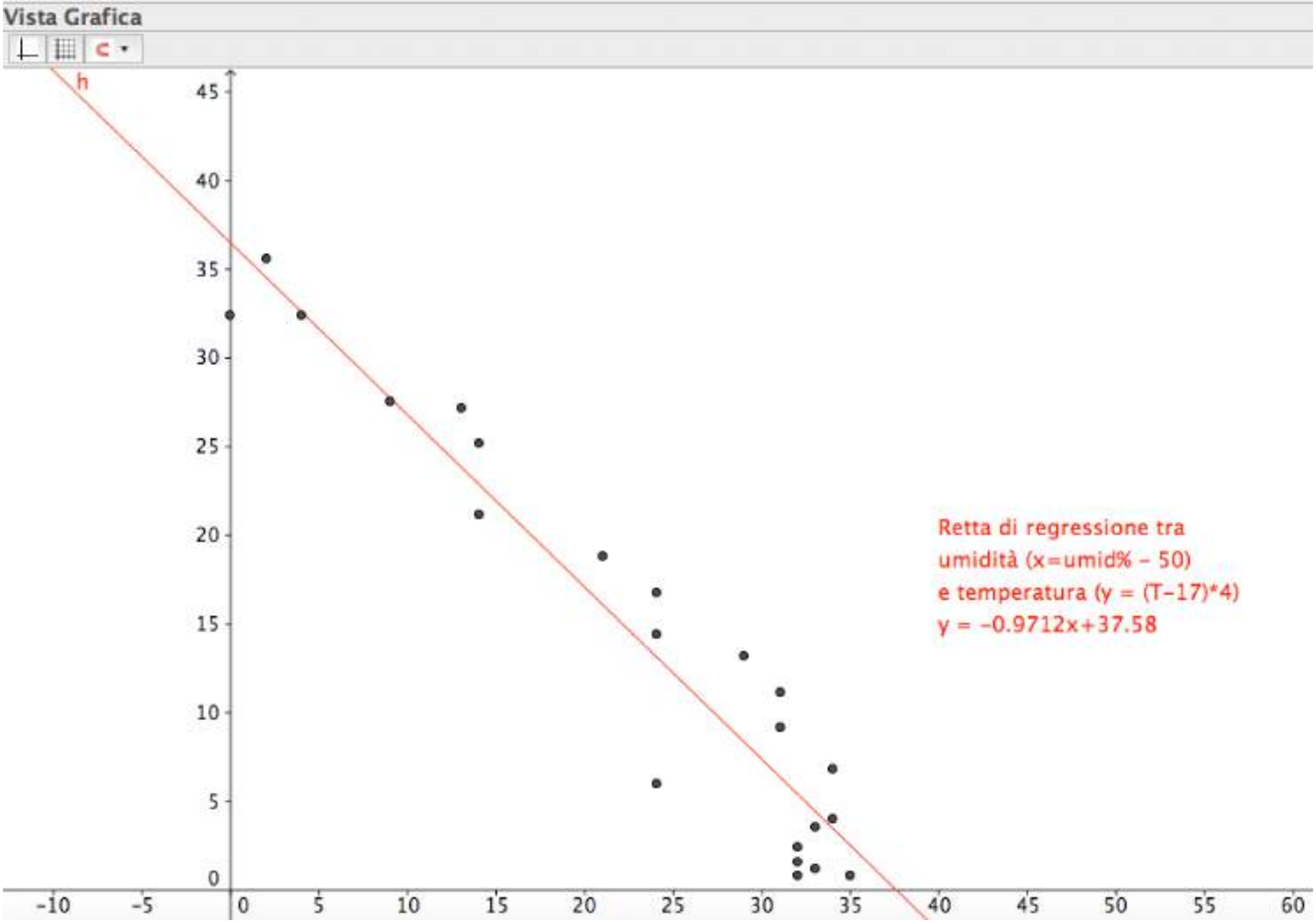


Vista Foglio di calcolo

	A	B	C
1	0	1.5	18.5
2	0.25	0.4	17.4
3	0.5	0.2	17.2
4	0.75	0.2	17.2
5	1	0.3	17.3
6	1.25	0.6	17.6
7	1.75	0.9	17.9
8	2.12	1	18
9	2.42	1.7	18.7
10	2.73	2.3	19.3
11	3.02	2.8	19.8
12	3.25	3.3	20.3
13	3.75	3.6	20.6
14	4	4.2	21.2
15	4.25	4.7	21.7
16	4.5	5.3	22.3
17	4.75	6.3	23.3
18	5	6.8	23.8
19	7	6.9	23.9
20	7.28	8.1	25.1
21	7.49	8.9	25.9
22	8.75	8.1	25.1
23			



Vista Grafica
corr Pearson (punti rossi) = d = -0.9
corr Pearson (punti neri)= e= 0.96
col.A=colD=col.G: ore 0 vale 7
0.25 equivale a 15 min; 1 equi
col C: temperature in C°
col. B: correzione col C: Bi = Ci
col. F: umid. rel. in %
col. E: correz. col. F: Ei=Fi-50
col. H: correz col. B: Hi = 4*Bi
Grafico nero: tempo (G) x temp
Grafico rosso: tempo (D) x umi
g
f



Vista Grafica
h
Retta di regressione tra
umidità (x=umid% - 50)
e temperatura (y = (T-17)*4)
y = -0.9712x+37.58

Approfondiamo il cambiamento

Πάντα ρει

I processi di cambiamento:
una **radice cognitiva** (D. Tall)
per la matematica e la scienza

Il correlativo cognitivo del **cambiamento** è l'attenzione a ciò che cambia e come cambia e a ciò che rimane invariante in una situazione.

Il correlativo matematico del cambiamento è l'attenzione non solo ai valori quantitativi ma anche e soprattutto alle loro **differenze** e al modo di rappresentarle e manipolarle per ragionarci.

→ **LE DIFFERENZE FINITE**:

a) Uno strumento potente che permette di preparare il calcolo differenziale fin dai primi anni.
b) Uno strumento facilmente implementabile con i software didattici.

Differenze: una misura del cambiamento (quadrati)

a	$4(a-2)$	a	a^2	a	4	ΔB	ΔD
A	B	C	D	E	F	G	H
2	0	2	0	2	4	4	1
3	4	3	1	3	4	4	3
4	8	4	4	4	4	4	5
5	12	5	9	5	4	4	7
6	16	6	16	6	4	4	9
7	20	7	25	7	4	4	11
8	24	8	36	8	4	4	13
9	28	9	49	9	4	4	15
10	32	10	64	10	4	4	17
11	36	11	81	11	4	4	19
12	40	12	100	12	4	4	21
13	44	13	121	13	4	4	23
14	48	14	144	14	4	4	25
15	52	15	169	15	4	4	27
16	56	16	196	16	4	4	29
17	60	17	225	17	4	4	31

Differenze: una misura del cambiamento (cubi)

$12(a-2)$ | $6(a-2)^2$ | $(a-2)^3$

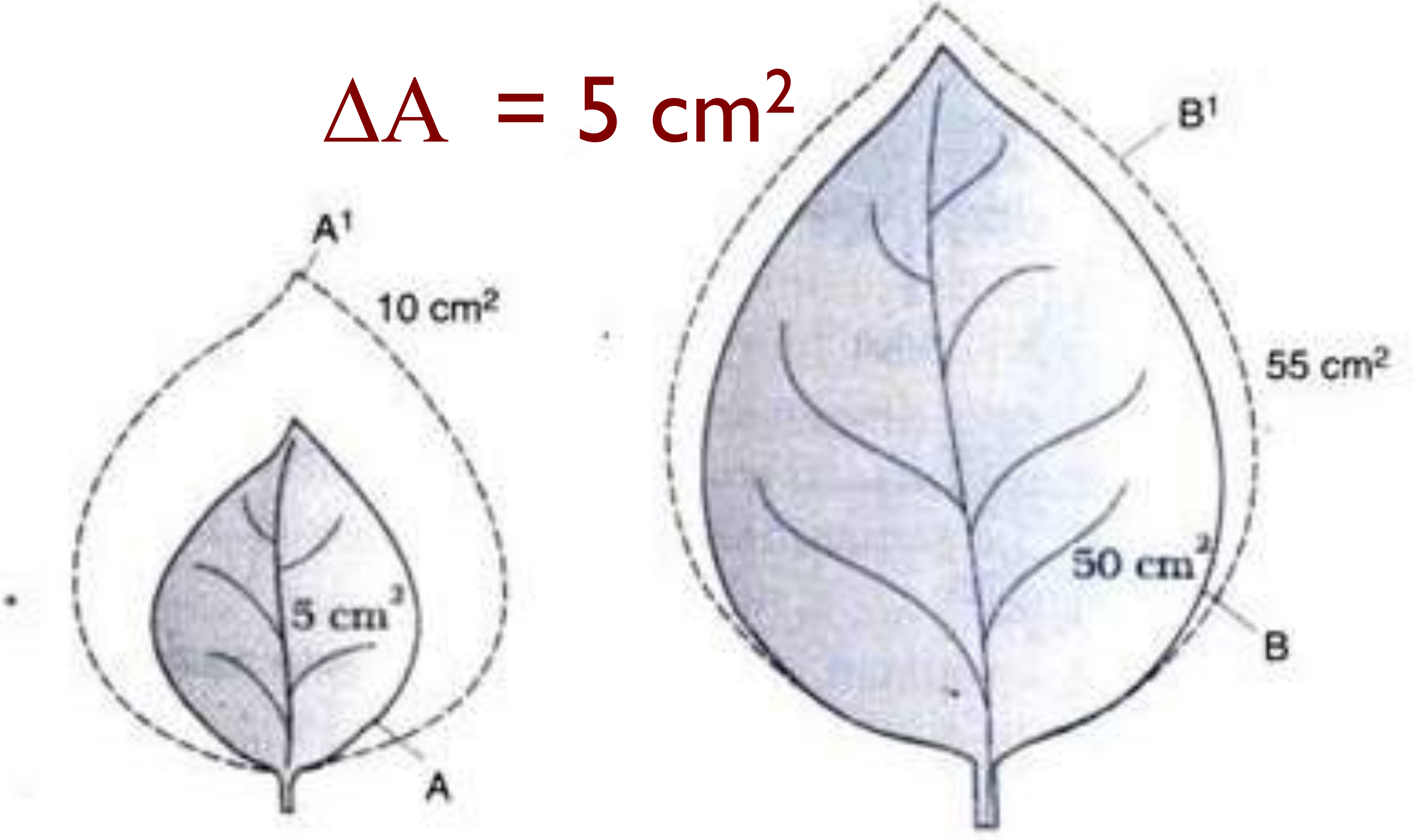
a | a | a | a

$\Delta 1B$ | $\Delta 1D$ | $\Delta 2D$ | $\Delta 1F$ | $\Delta 2F$ | $\Delta 3F$

A	B	C	D	E	F	G	H			K	L	M	N
2	0	2	0	2	0	2	8	12	6	12	1	6	6
3	12	3	6	3	1	3	8	12	18	12	7	12	6
4	24	4	24	4	8	4	8	12	30	12	19	18	6
5	36	5	54	5	27	5	8	12	42	12	37	24	6
6	48	6	96	6	64	6	8	12	54	12	61	30	6
7	60	7	150	7	125	7	8	12	66	12	91	36	6
8	72	8	216	8	216	8	8	12	78	12	127	42	6
9	84	9	294	9	343	9	8	12	90	12	169	48	6
10	96	10	384	10	512	10	8	12	102	12	217	54	6
11	108	11	486	11	729	11	8	12	114	12	271	60	6
12	120	12	600	12	1000	12	8	12	126	12	331	66	6
13	132	13	726	13	1331	13	8	12	138	12	397	72	6
14	144	14	864	14	1728	14	8	12	150	12	469	78	6
15	156	15	1014	15	2197	15	8	12	162	12	547	84	6
16	168	16	1176	16	2744	16	8	12	174	12	631	90	6
17	180	17	1350	17	3375	17	8	12	186	12	721	96	6
18	192	18	1536	18	4096	18	8	12	198	12	817	102	6
19	204	19	1734	19	4913	19	8	12	210	12	919	108	6
20	216	20	1944	20	5832	20	8	12	222	12	1027	114	6
21	228	21	2166	21	6859	21	8	12	234	12	1141	120	6
22	240	22	2400	22	8000	22	8	12	246	12	1261	126	6
23	252	23	2646	23	9261	23	8	12	258	12	1387	132	6
24	264	24	2904	24	10648	24	8	12	270	12	1519	138	6
25	276	25	3174	25	12167	25	8	12	282	12	1657	144	6
26	288	26	3456	26	13824	26	8	12	294	12	1801	150	
27	300	27	3750	27	15625	27	8	12	306		1951		

Un'idea più fine del cambiamento

$\Delta A = 5\ cm^2$

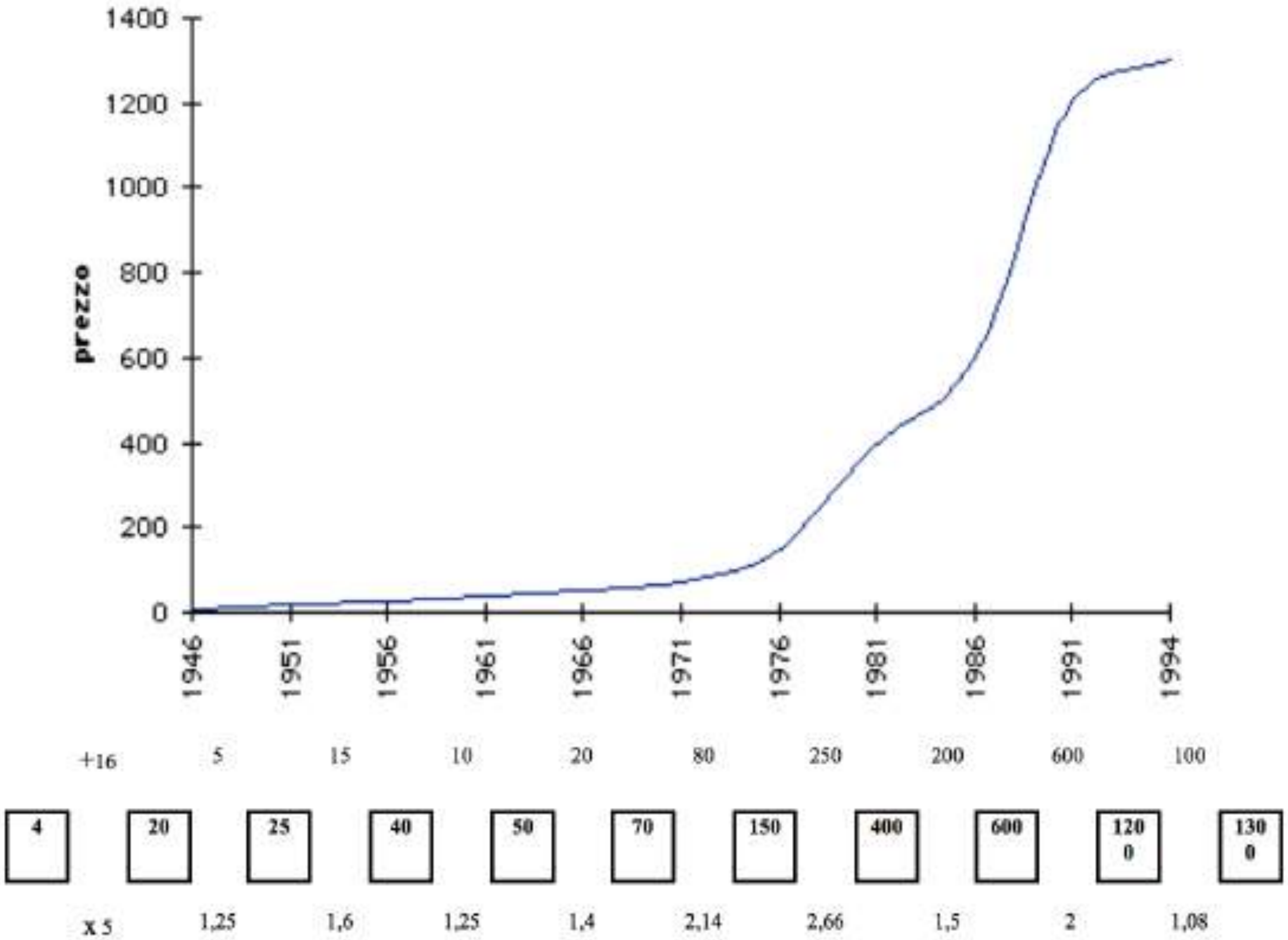


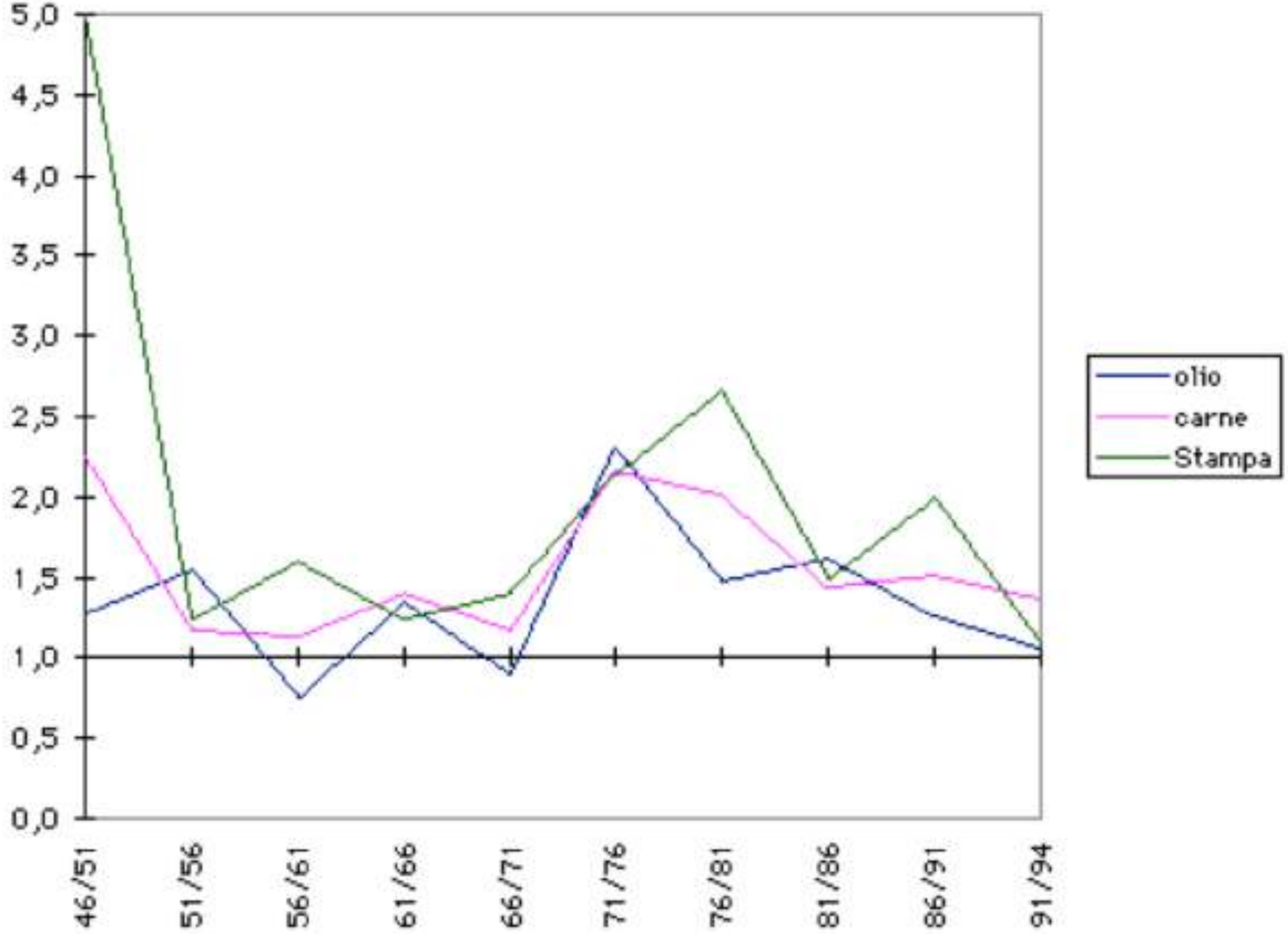
Il cambiamento relativo $\Delta_r A = \Delta A / A$

$\Delta_r = 5\ cm^2 / 5\ cm^2$
100%

$\Delta_r = 5\ cm^2 / 50\ cm^2$
10%

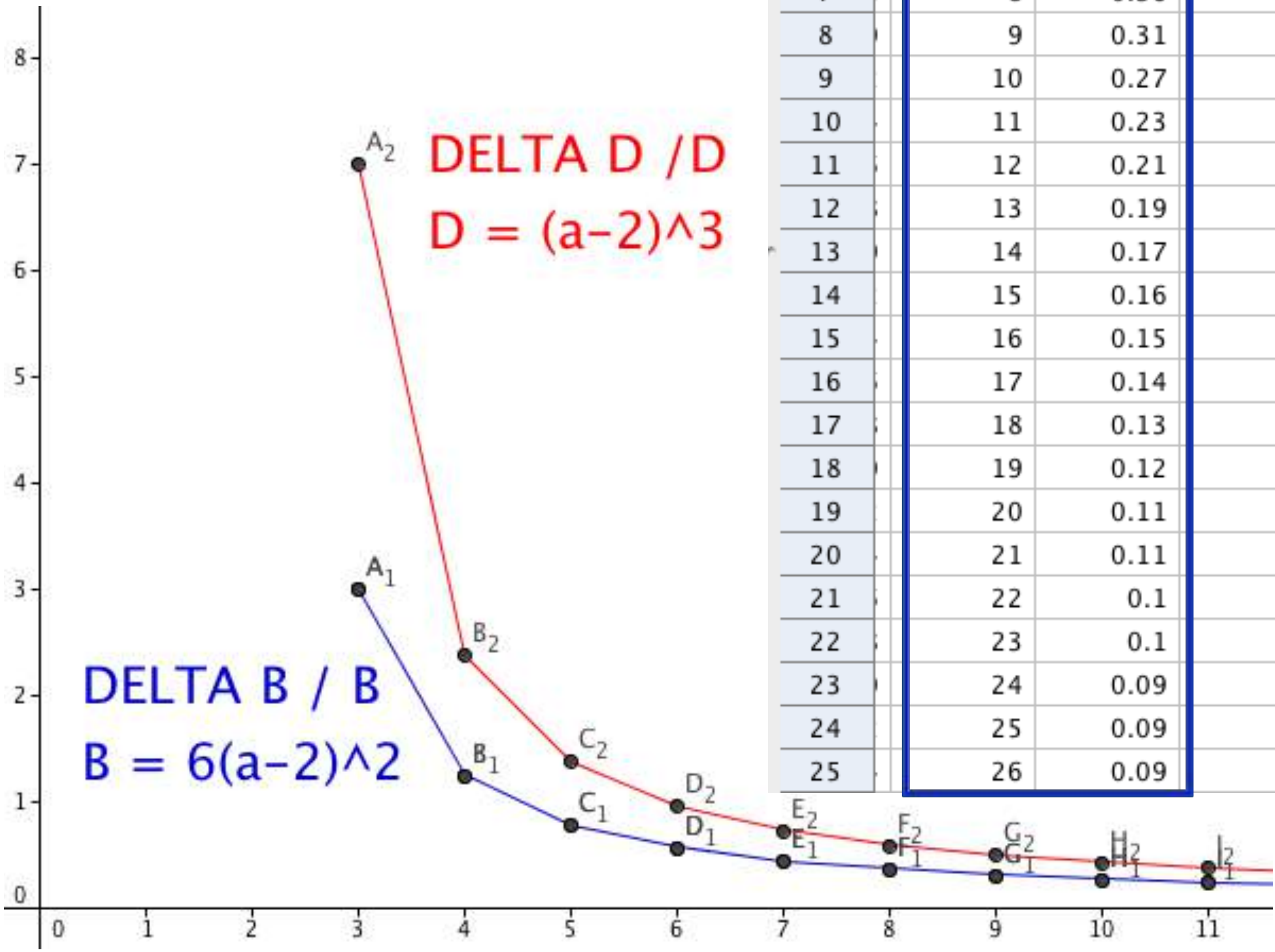
Esempio 8. Il valore del denaro nel tempo



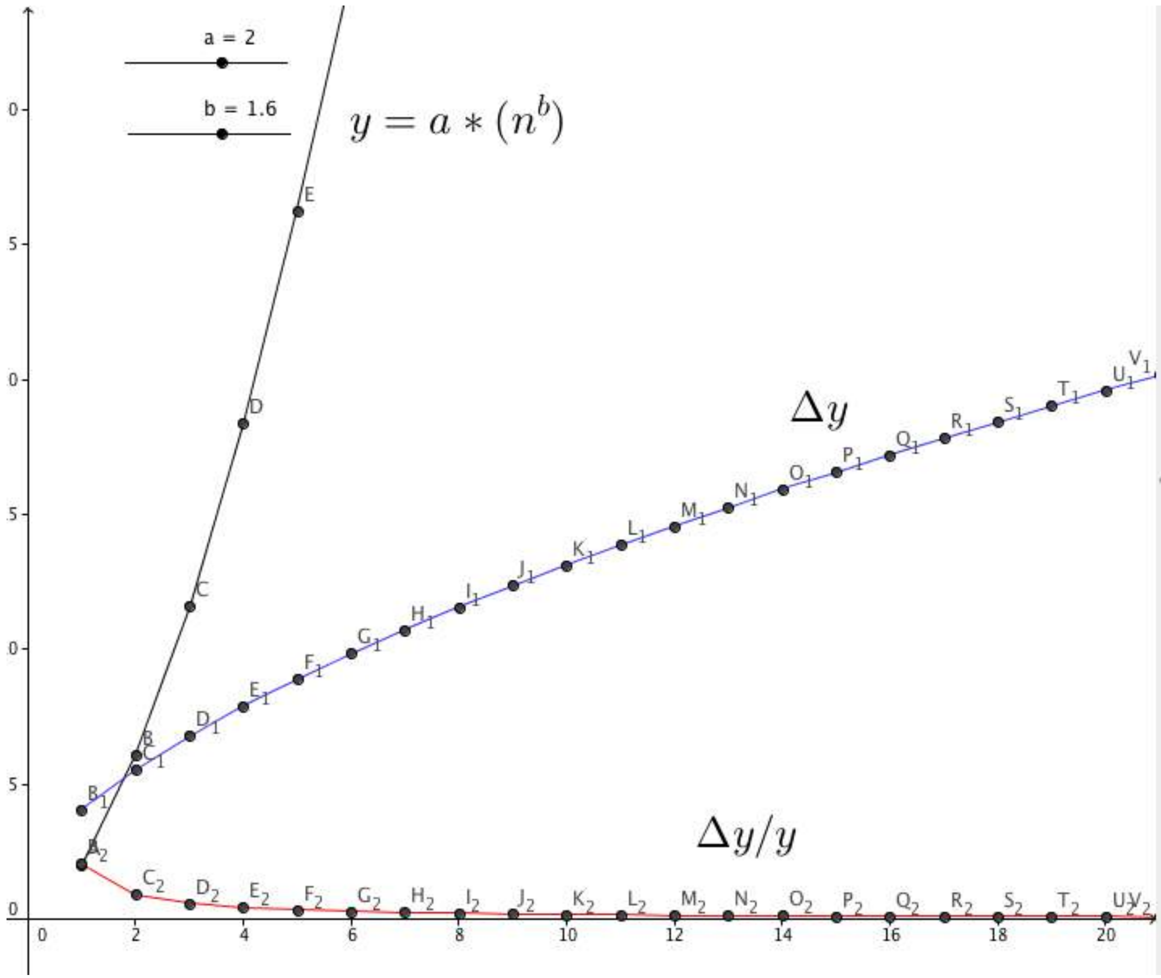

5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
46/51
51/56
56/61
61/66
66/71
71/76
76/81
81/86
86/91
91/94
olio
carne
Stampa

Cubi e differenze relative

	ΔB/B		I	J	ΔD/D	
1	2		2	1	2	
2	3	3	3	7	3	7
3	4	1.25	4	19	4	2.38
4	5	0.78	5	37	5	1.37
5	6	0.56	6	61	6	0.95
6	7	0.44	7	91	7	0.73
7	8	0.36	8	127	8	0.59
8	9	0.31	9	169	9	0.49
9	10	0.27	10	217	10	0.42
10	11	0.23	11	271	11	0.37
11	12	0.21	12	331	12	0.33
12	13	0.19	13	397	13	0.3
13	14	0.17	14	469	14	0.27
14	15	0.16	15	547	15	0.25
15	16	0.15	16	631	16	0.23
16	17	0.14	17	721	17	0.21
17	18	0.13	18	817	18	0.2
18	19	0.12	19	919	19	0.19
19	20	0.11	20	1027	20	0.18
20	21	0.11	21	1141	21	0.17
21	22	0.1	22	1261	22	0.16
22	23	0.1	23	1387	23	0.15
23	24	0.09	24	1519	24	0.14
24	25	0.09	25	1657	25	0.14
25	26	0.09	26	1801		

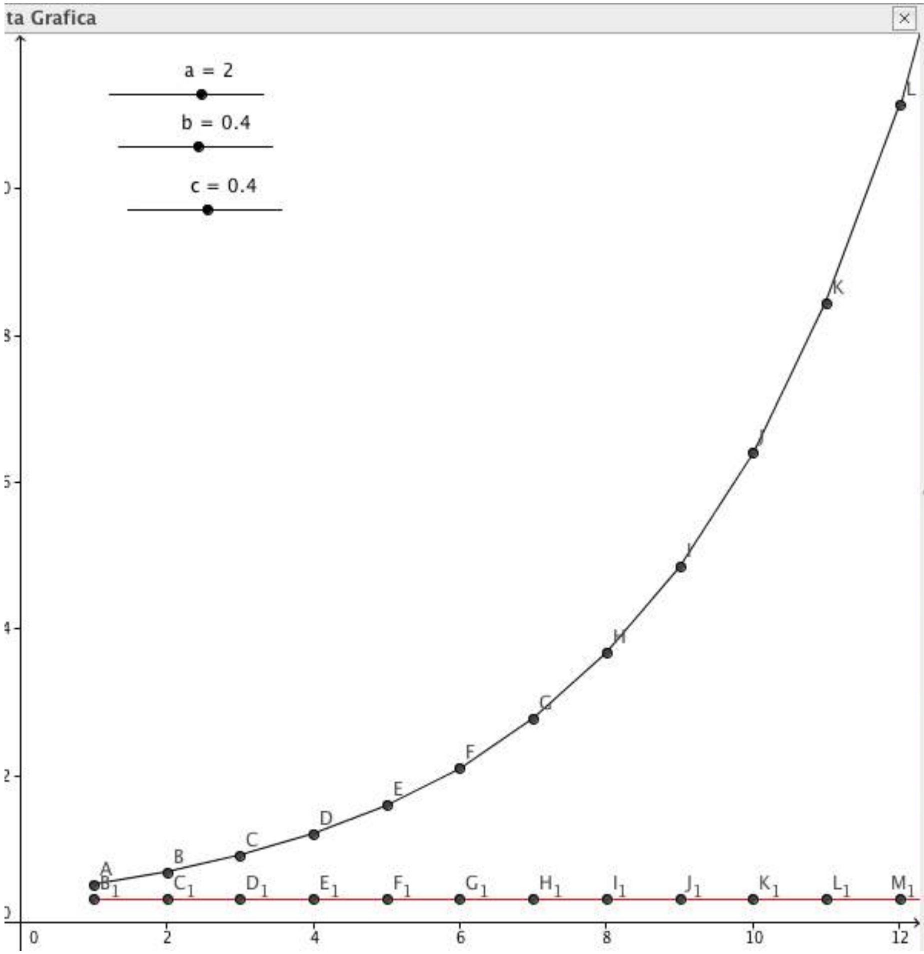


Diff relative: polinomi



	A	B	C	D	E	F
1	n	a*n^b	n	DELTA B	n	DELTA B /B
2	1	2	1	4.06	1	2.03
3	2	6.06	2	5.54	2	0.91
4	3	11.6	3	6.78	3	0.58
5	4	18.38	4	7.89	4	0.43
6	5	26.27	5	8.9	5	0.34
7	6	35.16	6	9.84	6	0.28
8	7	45	7	10.72	7	0.24
9	8	55.72	8	11.55	8	0.21
10	9	67.27	9	12.35	9	0.18
11	10	79.62	10	13.12	10	0.16
12	11	92.74	11	13.85	11	0.15
13	12	106.59	12	14.56	12	0.14
14	13	121.15	13	15.25	13	0.13
15	14	136.41	14	15.92	14	0.12
16	15	152.33	15	16.57	15	0.11
17	16	168.9	16	17.2	16	0.1
18	17	186.1	17	17.82	17	0.1
19	18	203.92	18	18.43	18	0.09
20	19	222.35	19	19.02	19	0.09
21	20	241.37	20	19.6	20	0.08
22	21	260.96	21	20.17	21	0.08
23	22	281.13	22	20.72	22	0.07
24	23	301.85	23	21.27	23	0.07
25	24	323.12	24	21.81	24	0.07
26	25	344.93	25		25	

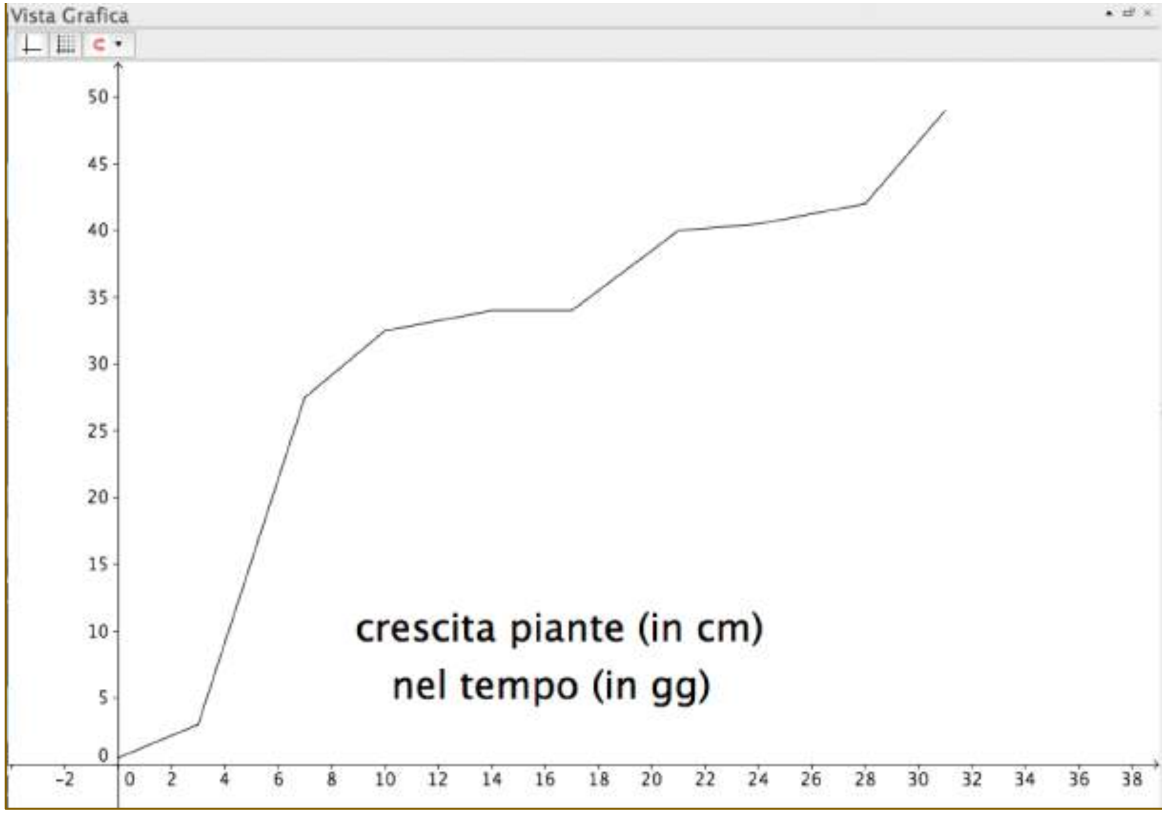
Diff relative: esponenziali



Vista Foglio di calcolo

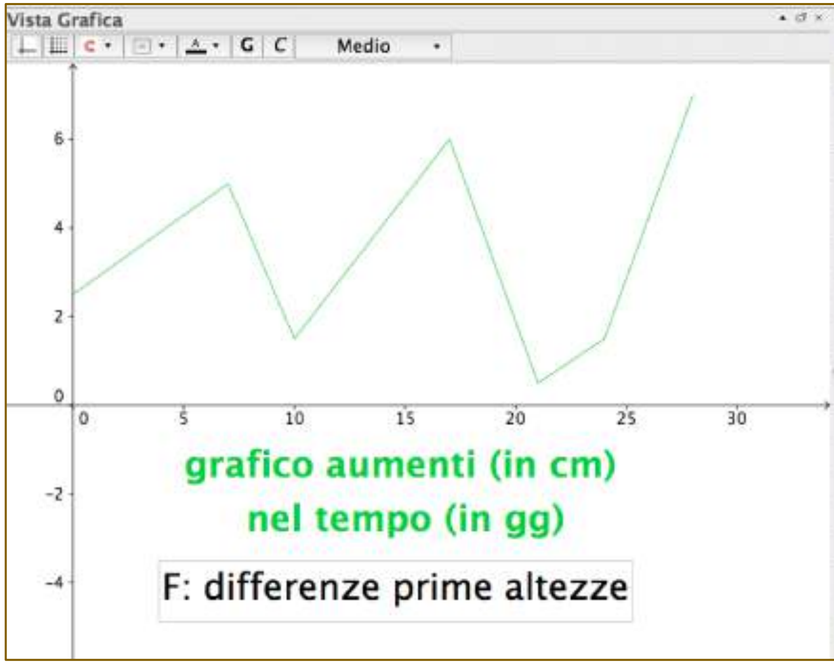
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a^n	a^(bn)	n	c*a^(b*n)	DELTA E	n	DELTA E/E
2	1	2	1.32	1	0.53	0.17	1	0.32
3	2	4	1.74	2	0.7	0.22	2	0.32
4	3	8	2.3	3	0.92	0.29	3	0.32
5	4	16	3.03	4	1.21	0.39	4	0.32
6	5	32	4	5	1.6	0.51	5	0.32
7	6	64	5.28	6	2.11	0.67	6	0.32
8	7	128	6.96	7	2.79	0.89	7	0.32
9	8	256	9.19	8	3.68	1.17	8	0.32
10	9	512	12.13	9	4.85	1.55	9	0.32
11	10	1024	16	10	6.4	2.04	10	0.32
12	11	2048	21.11	11	8.44	2.7	11	0.32
13	12	4096	27.86	12	11.14	3.56	12	0.32
14	13	8192	36.76	13	14.7	4.7	13	0.32
15	14	16384	48.5	14	19.4	6.2	14	0.32
16	15	32768	64	15	25.6	8.18	15	0.32
17	16	65536	84.45	16	33.78	10.79	16	0.32
18	17	131072	111.43	17	44.57	14.24	17	0.32
19	18	262144	147.03	18	58.81	18.79	18	0.32
20	19	524288	194.01	19	77.6	24.8	19	0.32
21	20	1048576	256	20	102.4	32.72	20	0.32
22	21	2097152	337.79	21	135.12	43.17	21	0.32
23	22	4194304	445.72	22	178.29	56.96	22	0.32
24	23	8388608	588.13	23	235.25	75.17	23	0.32
25	24	167772...	776.05	24	310.42	99.18	24	0.32
26	25	335544...	1024	25	409.6			

Crescita fagioli



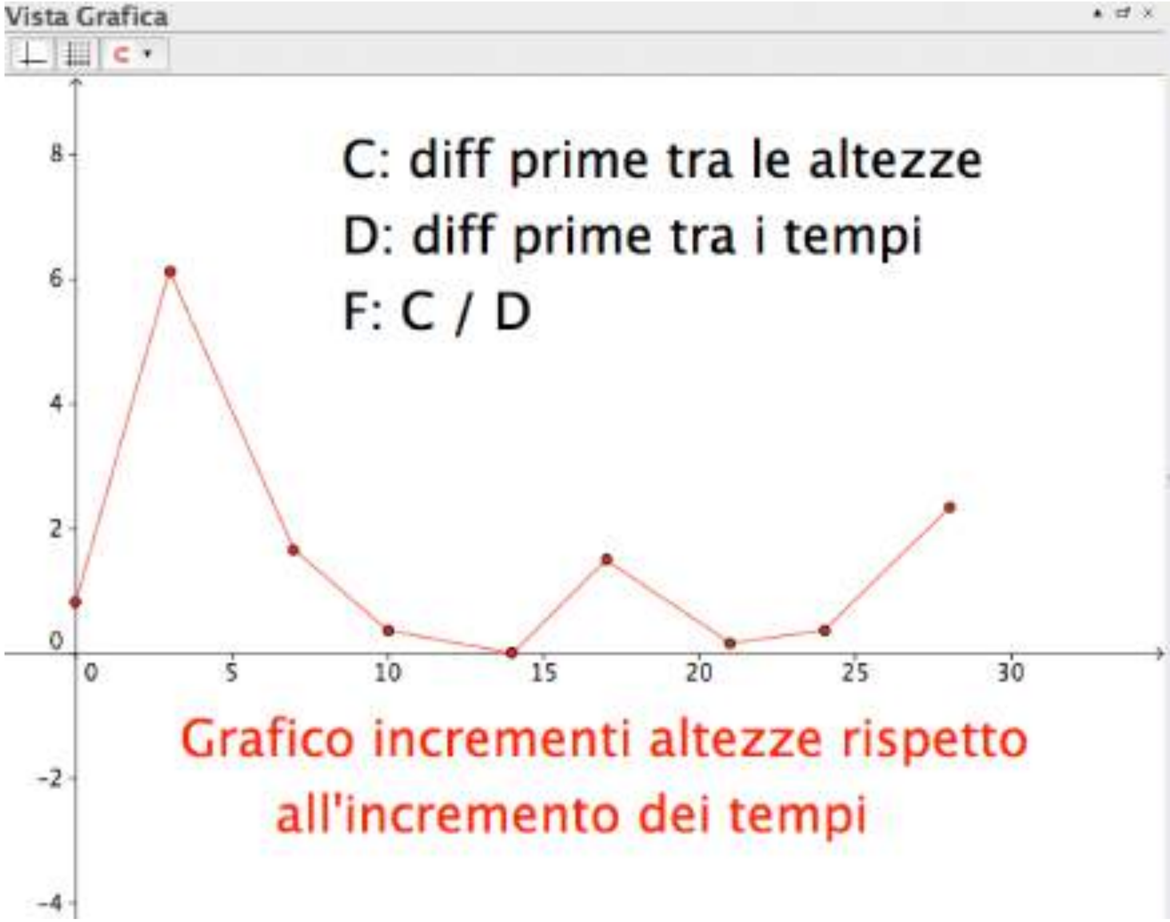
Vista Foglio di calcolo

	A	B
1	0	0.5
2	3	3
3	7	27.5
4	10	32.5
5	14	34
6	17	34
7	21	40
8	24	40.5
9	28	42
10	31	49



Vista Foglio di calcolo

	A	B	C	D	E	F
1	0	0.5	2.5	3	0	2.5
2	3	3	24.5	4	3	24.5
3	7	27.5	5	3	7	5
4	10	32.5	1.5	4	10	1.5
5	14	34	0	3	14	0
6	17	34	6	4	17	6
7	21	40	0.5	3	21	0.5
8	24	40.5	1.5	4	24	1.5
9	28	42	7	3	28	7
10	31	49				
11		0				

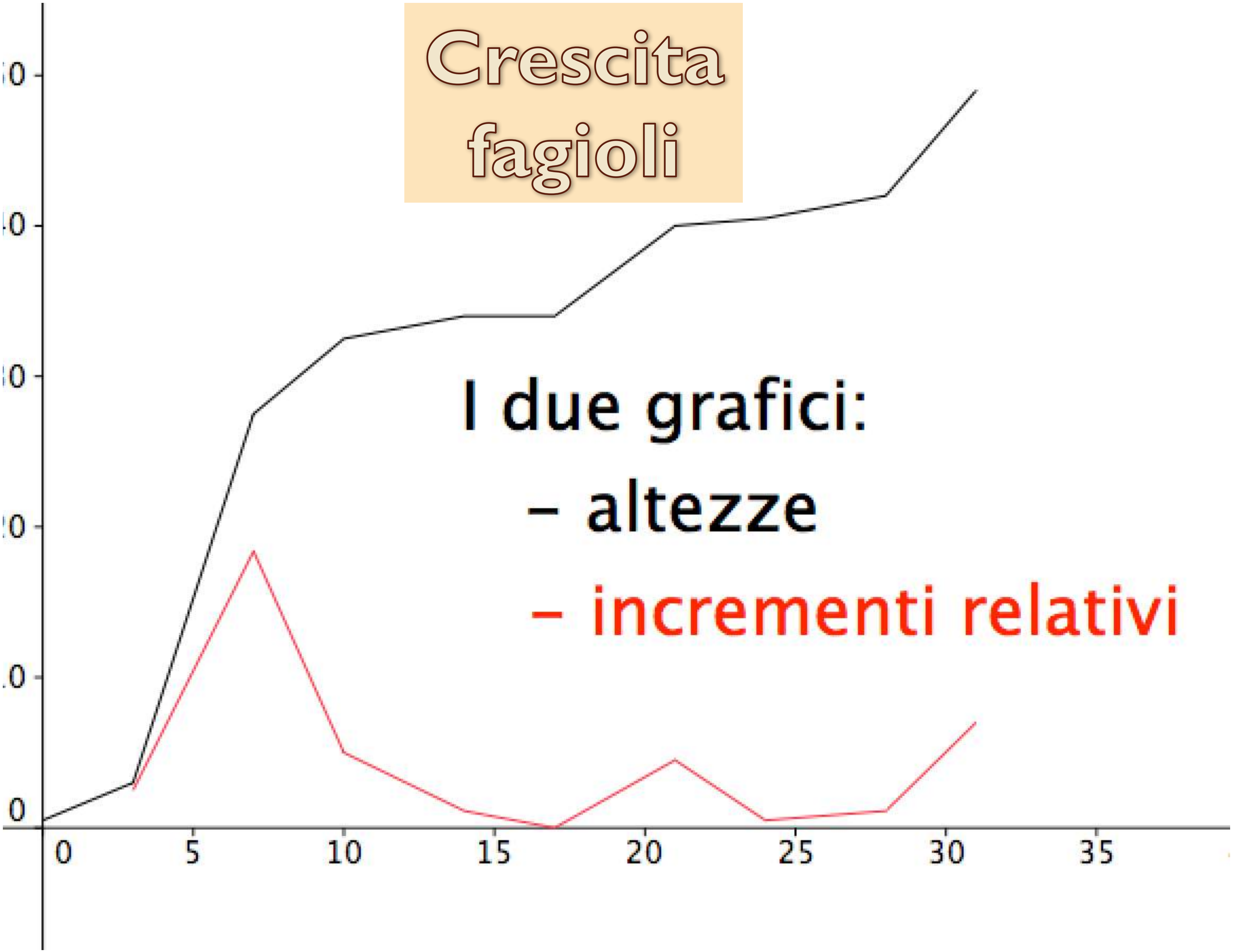


Vista Foglio di calcolo

	A	B	C	D	E	F
1	0	0.5	2.5	3	0	0.83
2	3	3	24.5	4	3	6.13
3	7	27.5	5	3	7	1.67
4	10	32.5	1.5	4	10	0.38
5	14	34	0	3	14	0
6	17	34	6	4	17	1.5
7	21	40	0.5	3	21	0.17
8	24	40.5	1.5	4	24	0.38
9	28	42	7	3	28	2.33
10	31	49				
11		0				
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						

Crescita fagioli

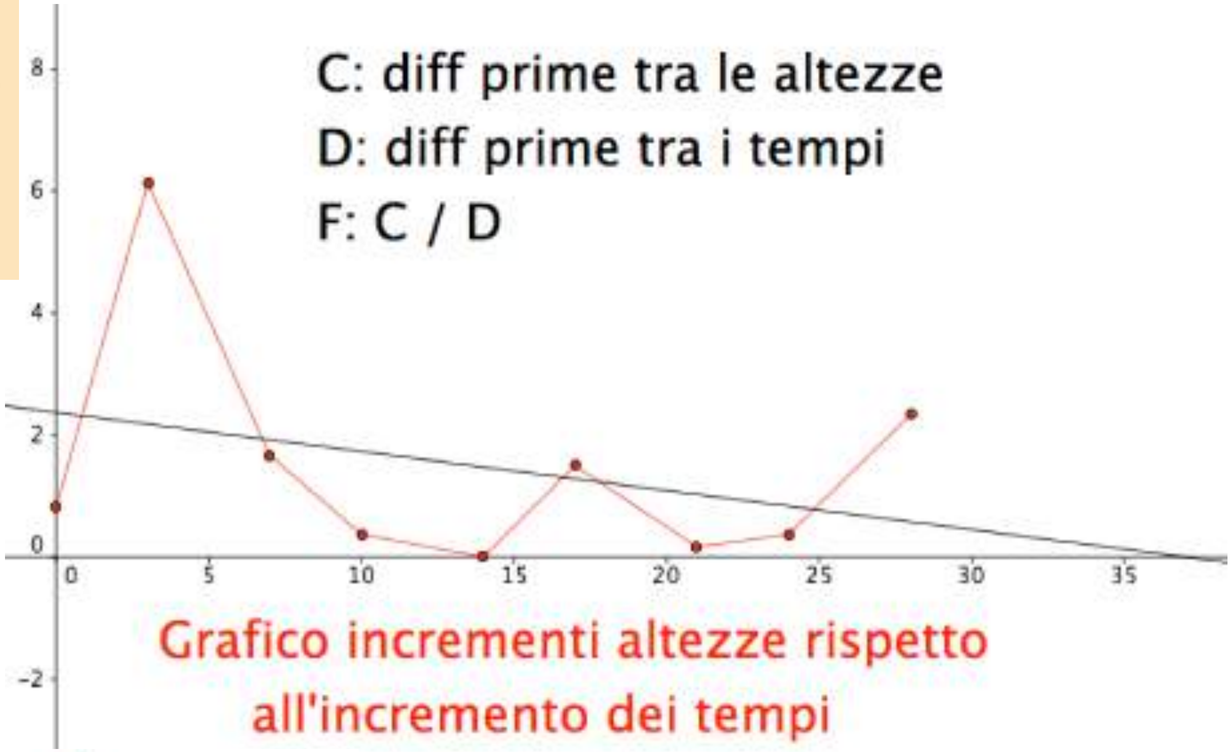
Crescita fagioli

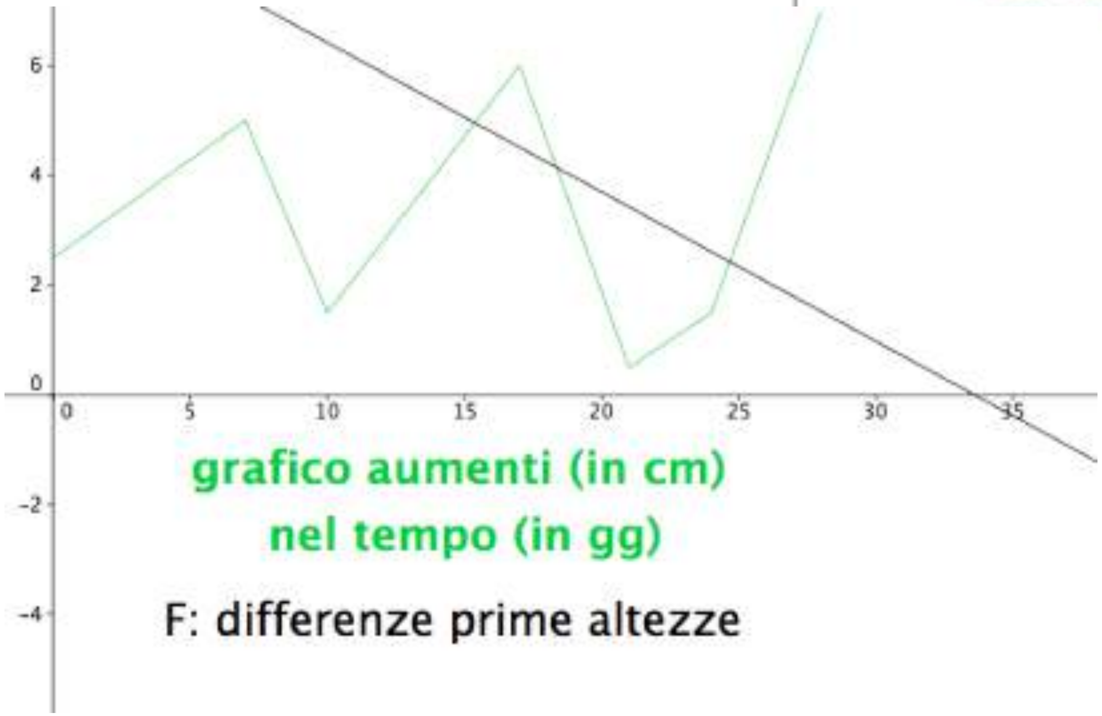


I due grafici:

- altezze
- incrementi relativi

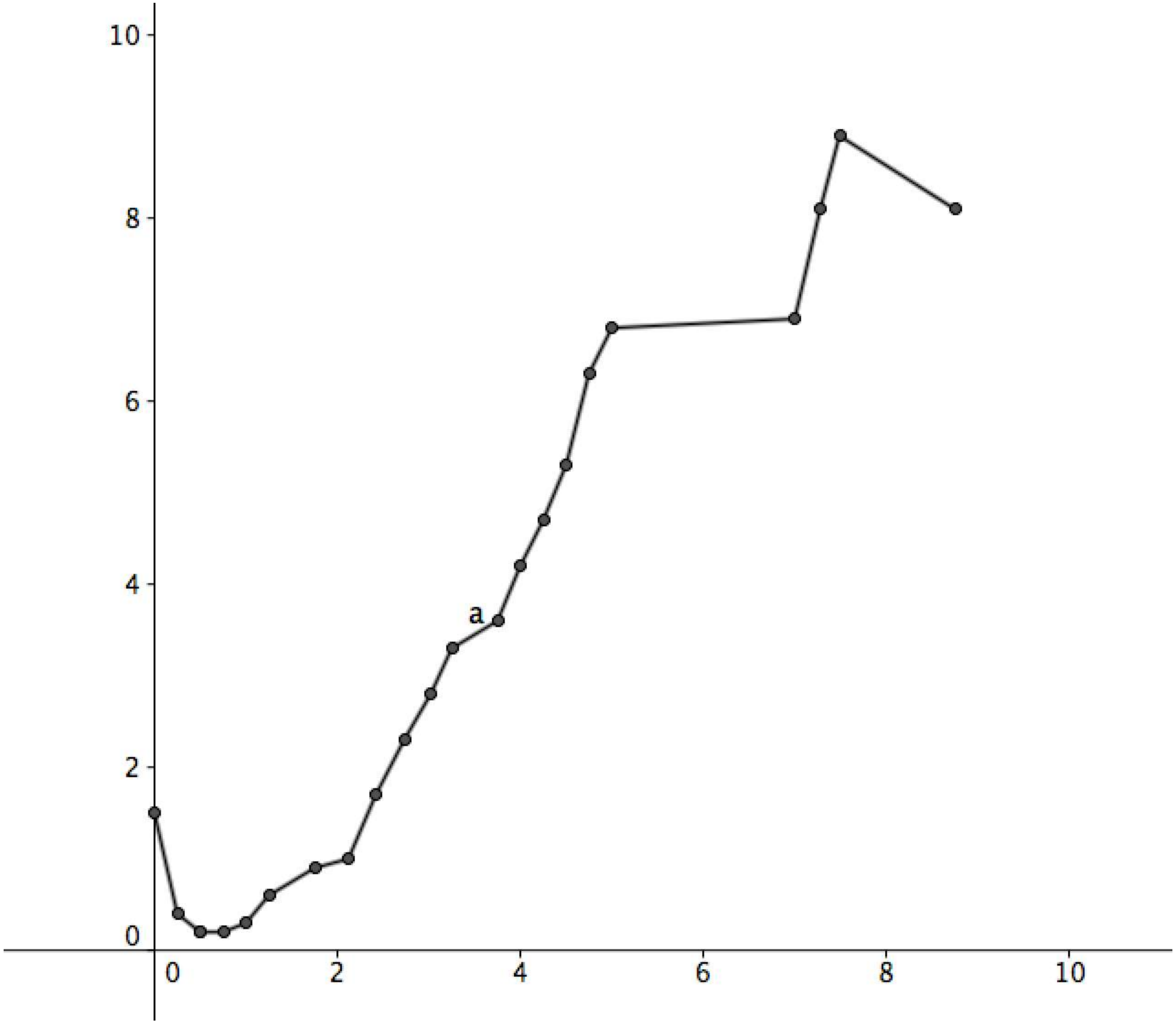
Crescita fagioli

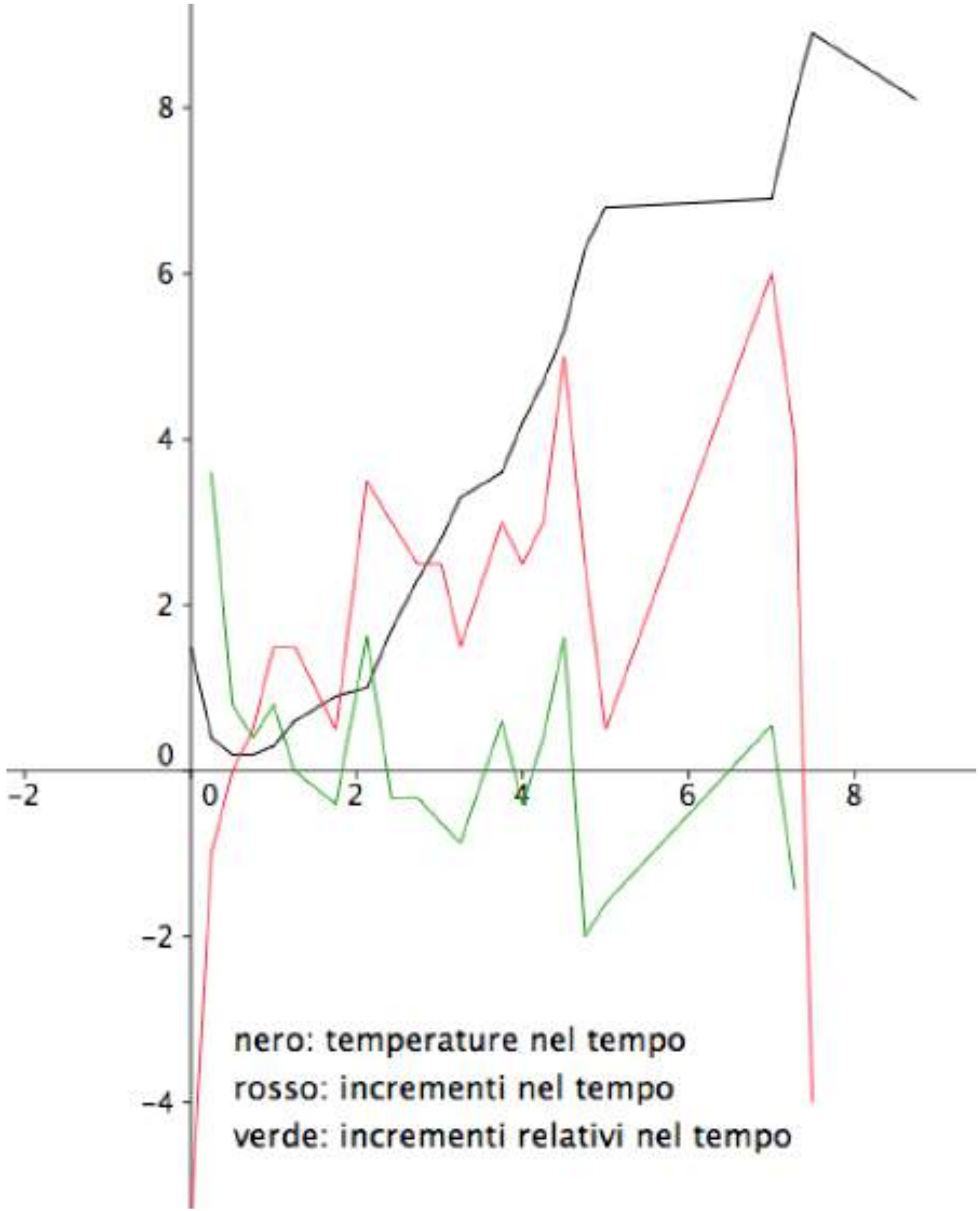




Rette di regressione

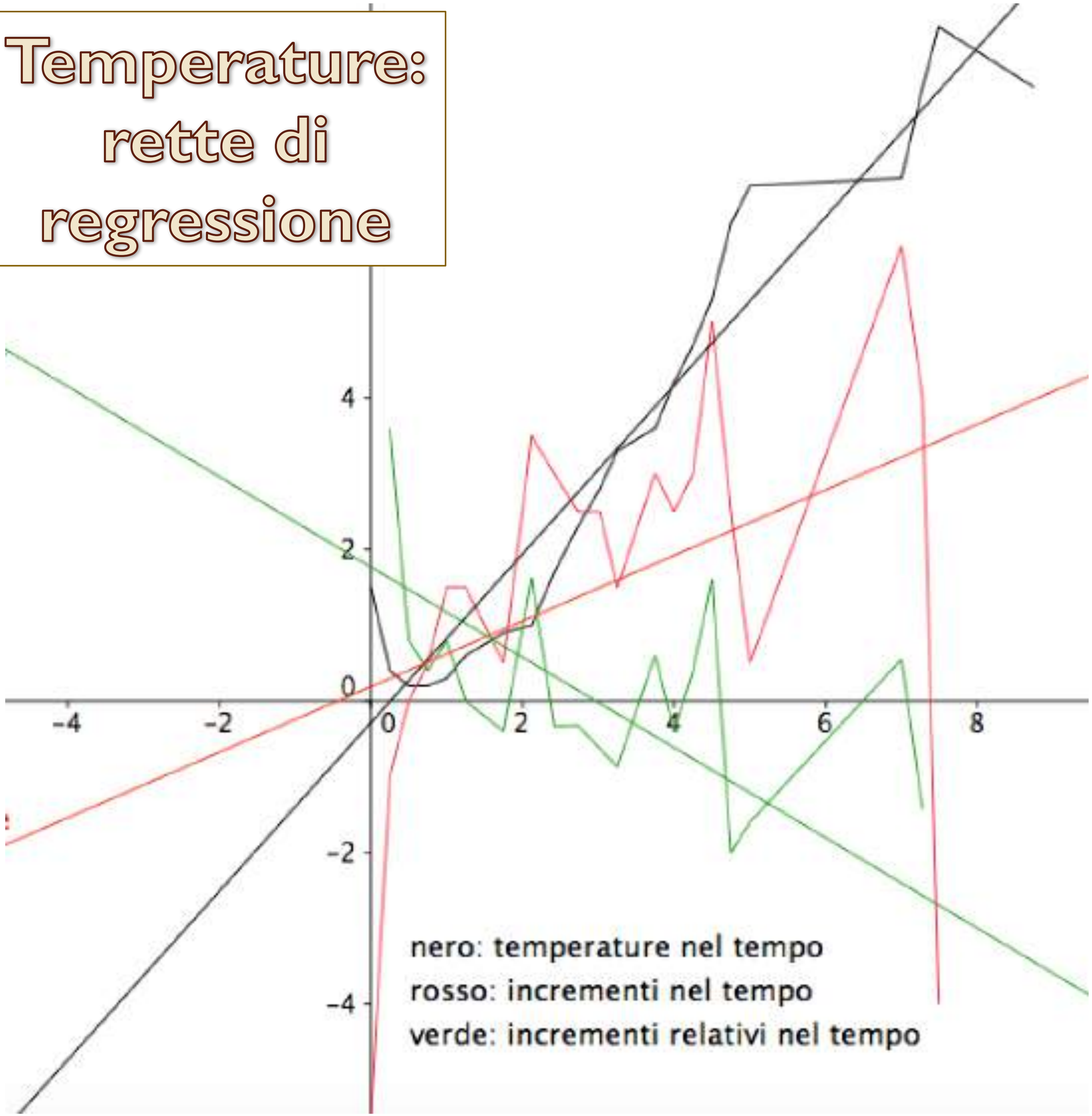
Temperature





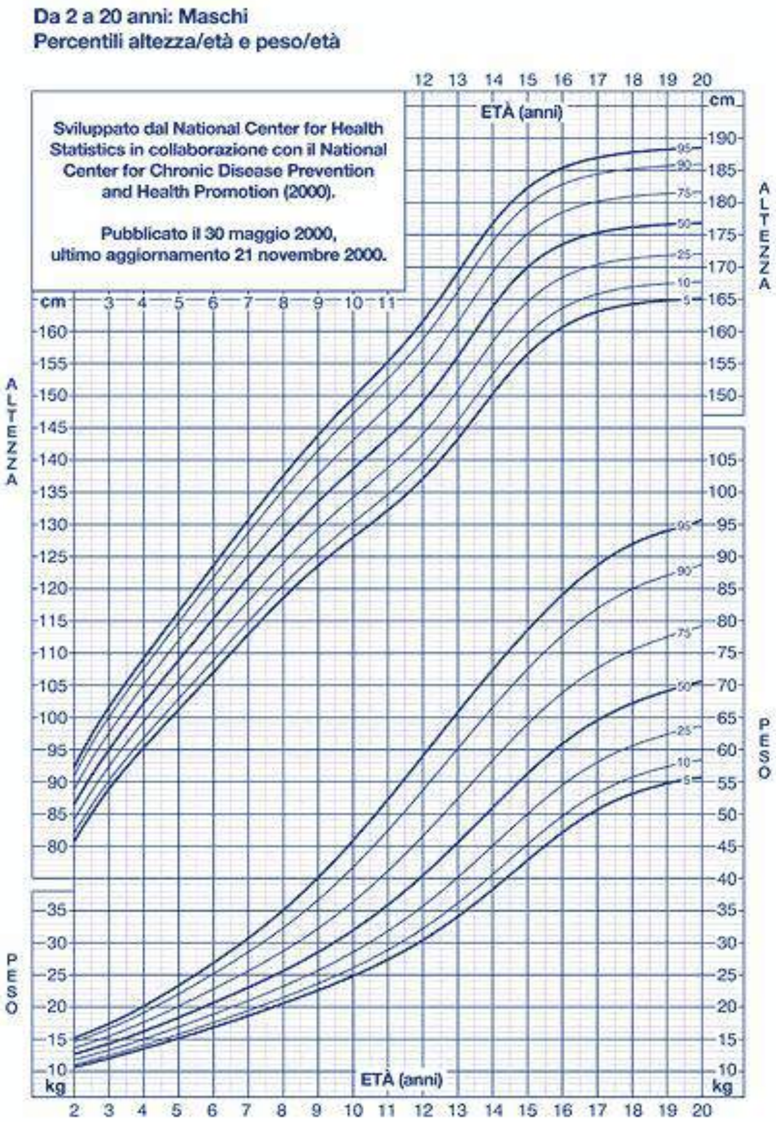
8
6
4
2
0
−2
−4
-2
0
2
4
6
8
nero: temperature nel tempo
rosso: incrementi nel tempo
verde: incrementi relativi nel tempo

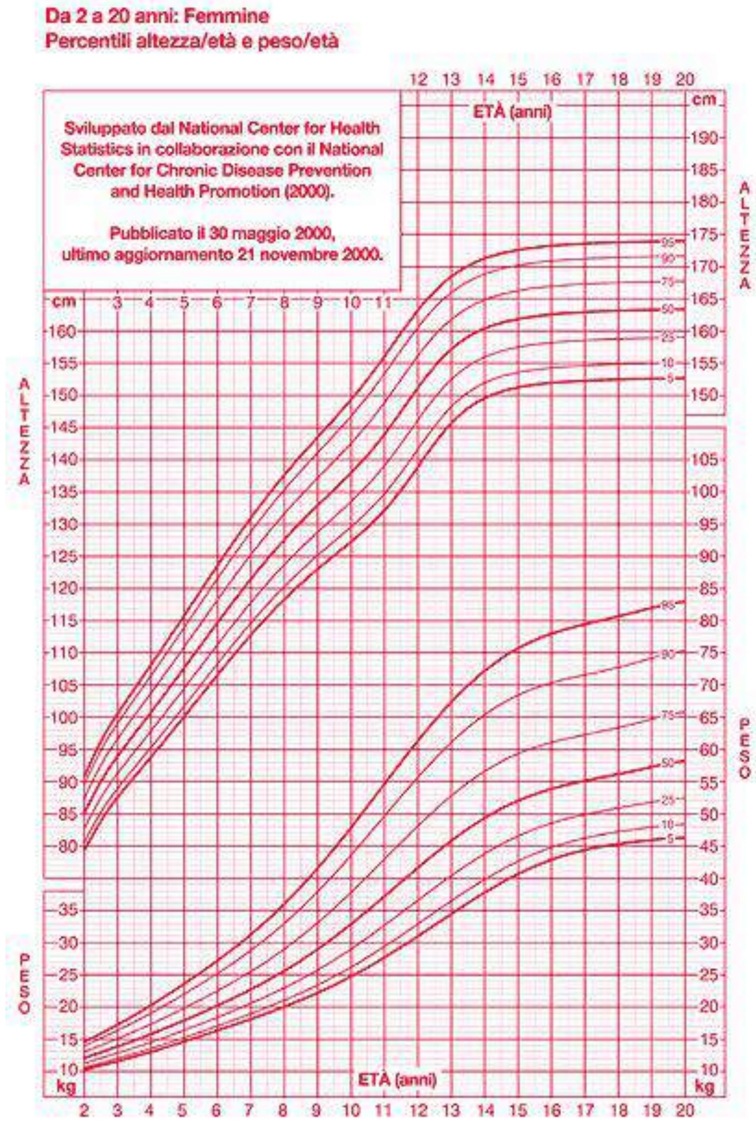
Temperature: rette di regressione



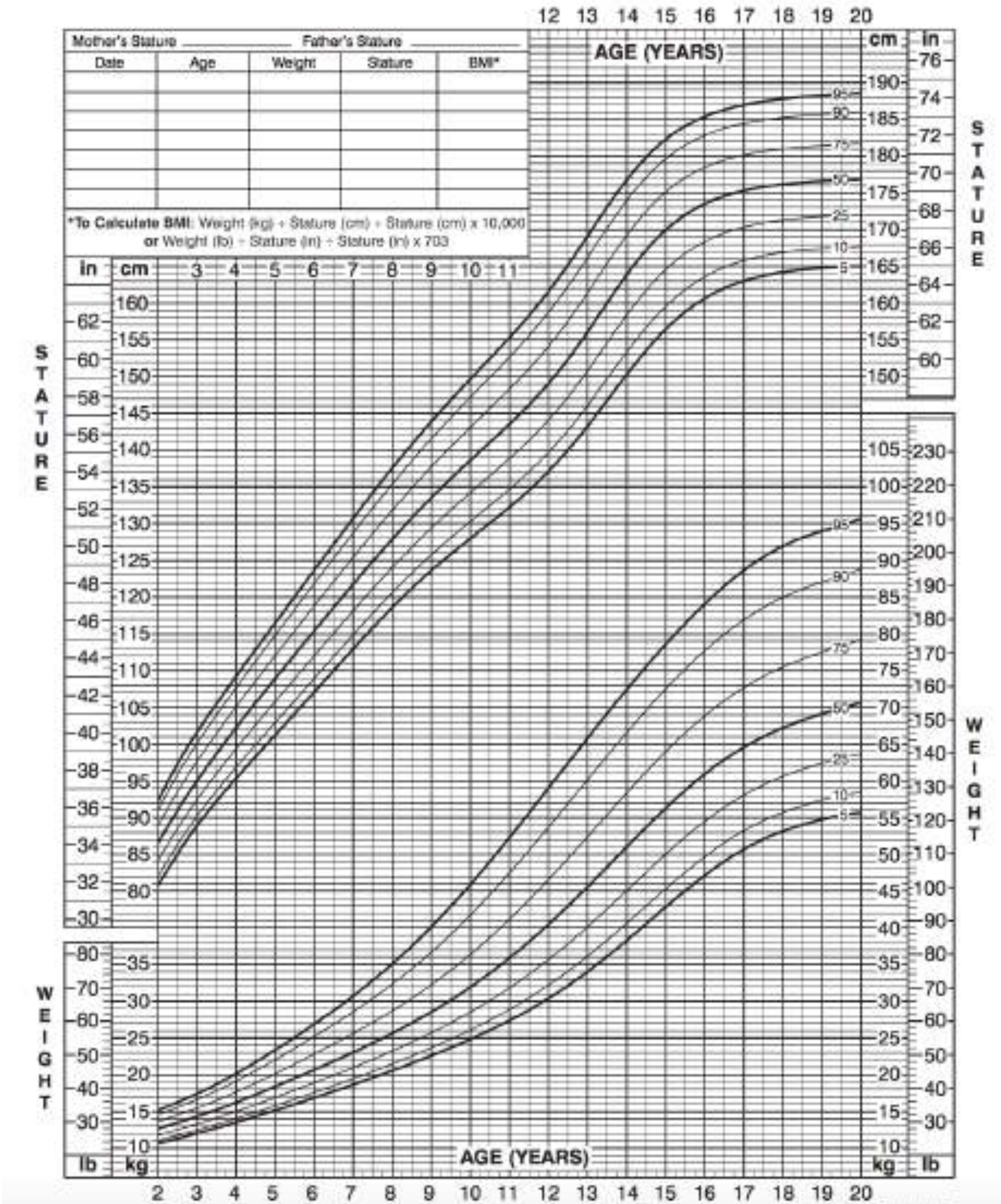
Altri fenomeni di crescita

Crescita media ragazze/i

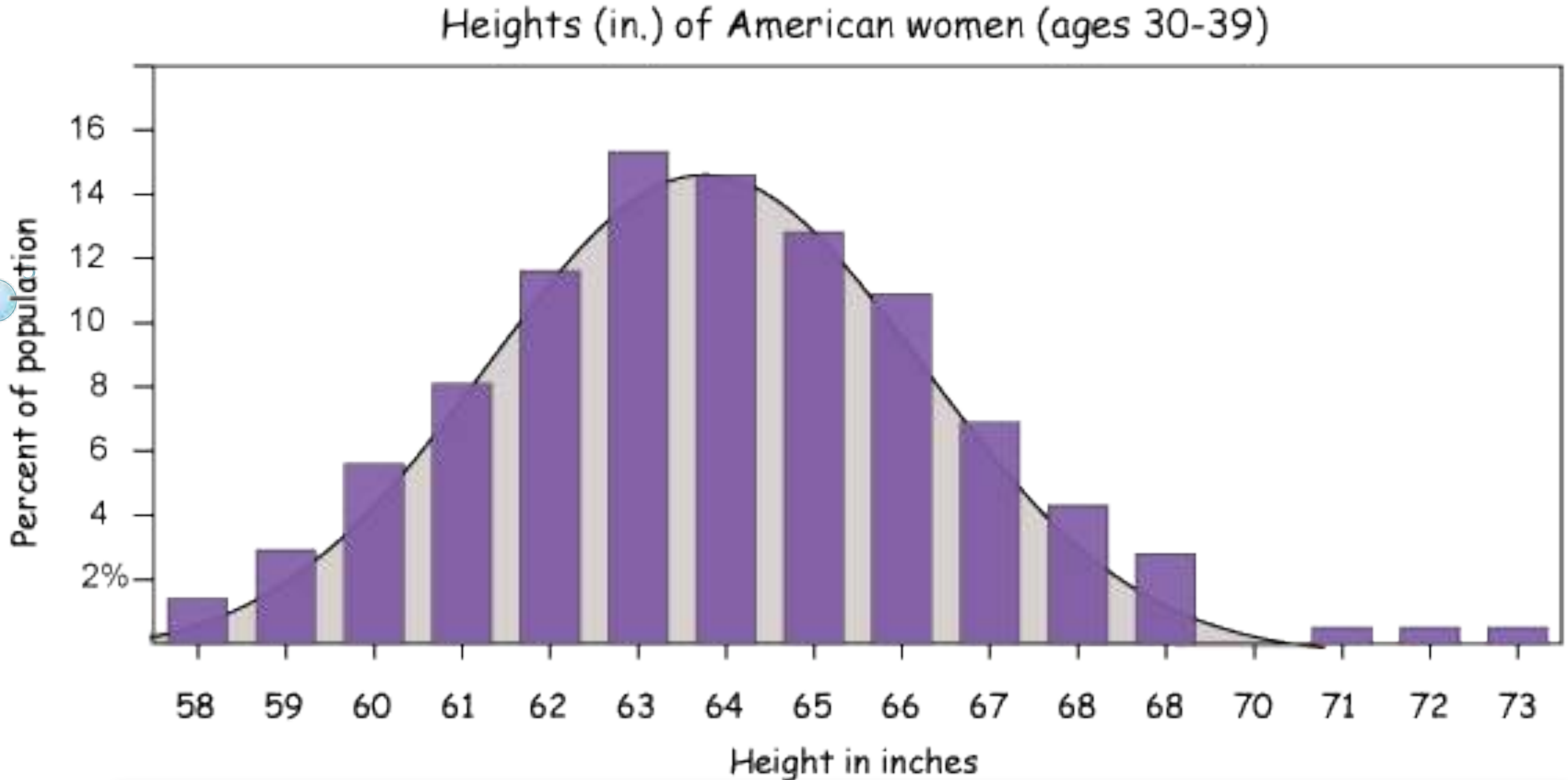




Ragazzi

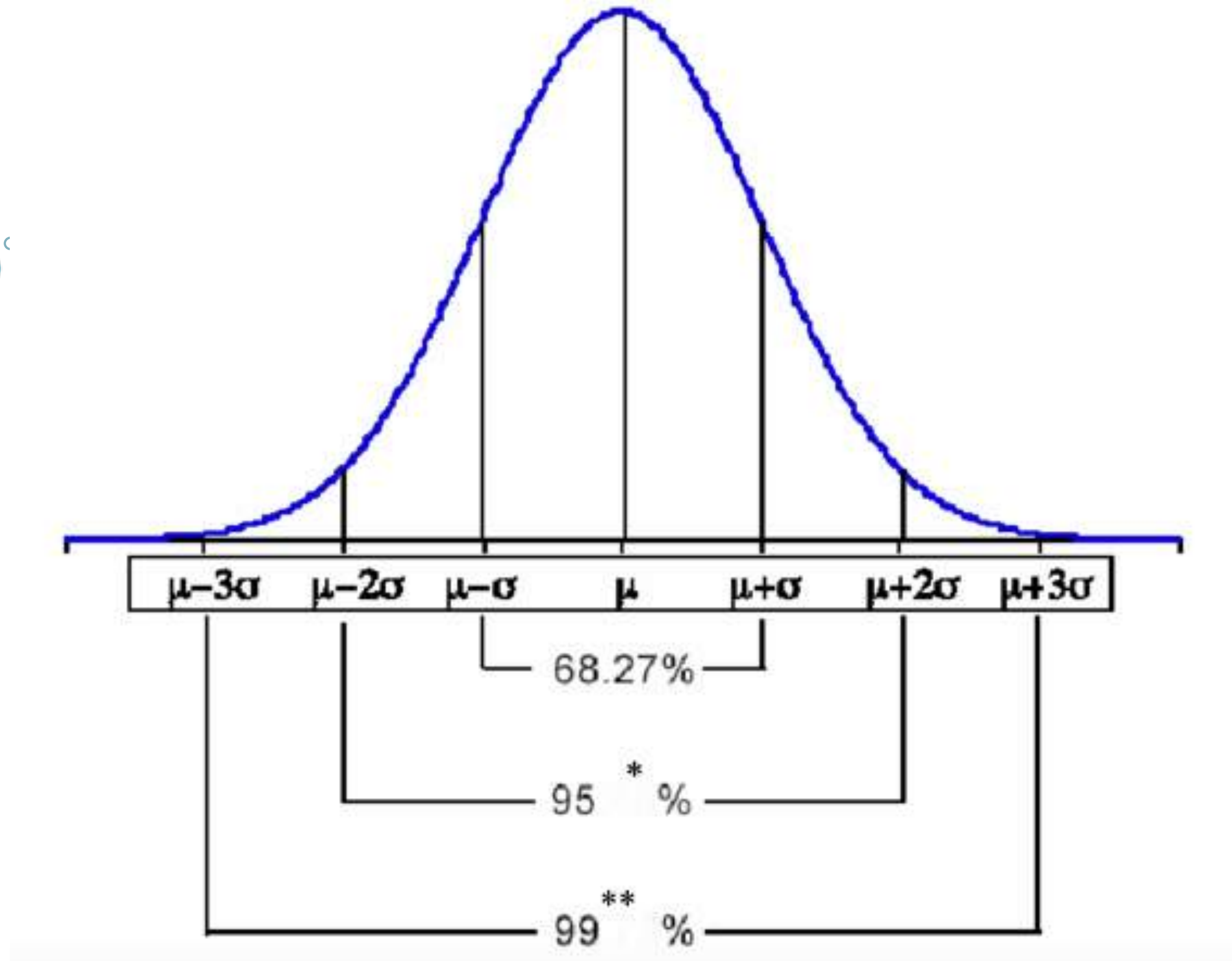

Mother's Stature
Father's Stature
Date
Age
Weight
Stature
BMI*
*To Calculate BMI: Weight (kg) ÷ Stature (cm) ÷ Stature (cm) x 10,000
or Weight (lb) ÷ Stature (in) ÷ Stature (in) x 703
AGE (YEARS)
STATURE
WEIGHT
in
cm
kg
lb

CDC



147 152 157 160 167 173 185

Altezza in cm

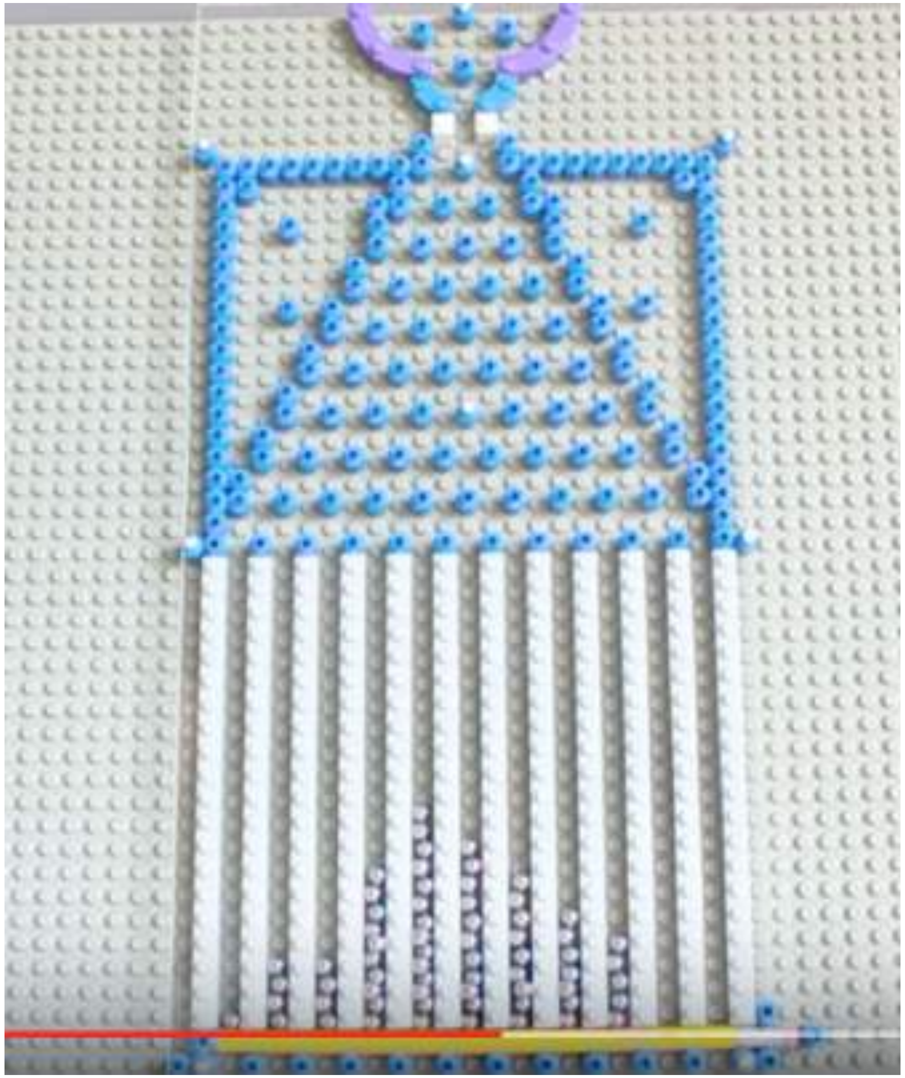


$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}},$$

μ indica la media aritmetica dei valori

dove $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ è la media aritmetica di X.

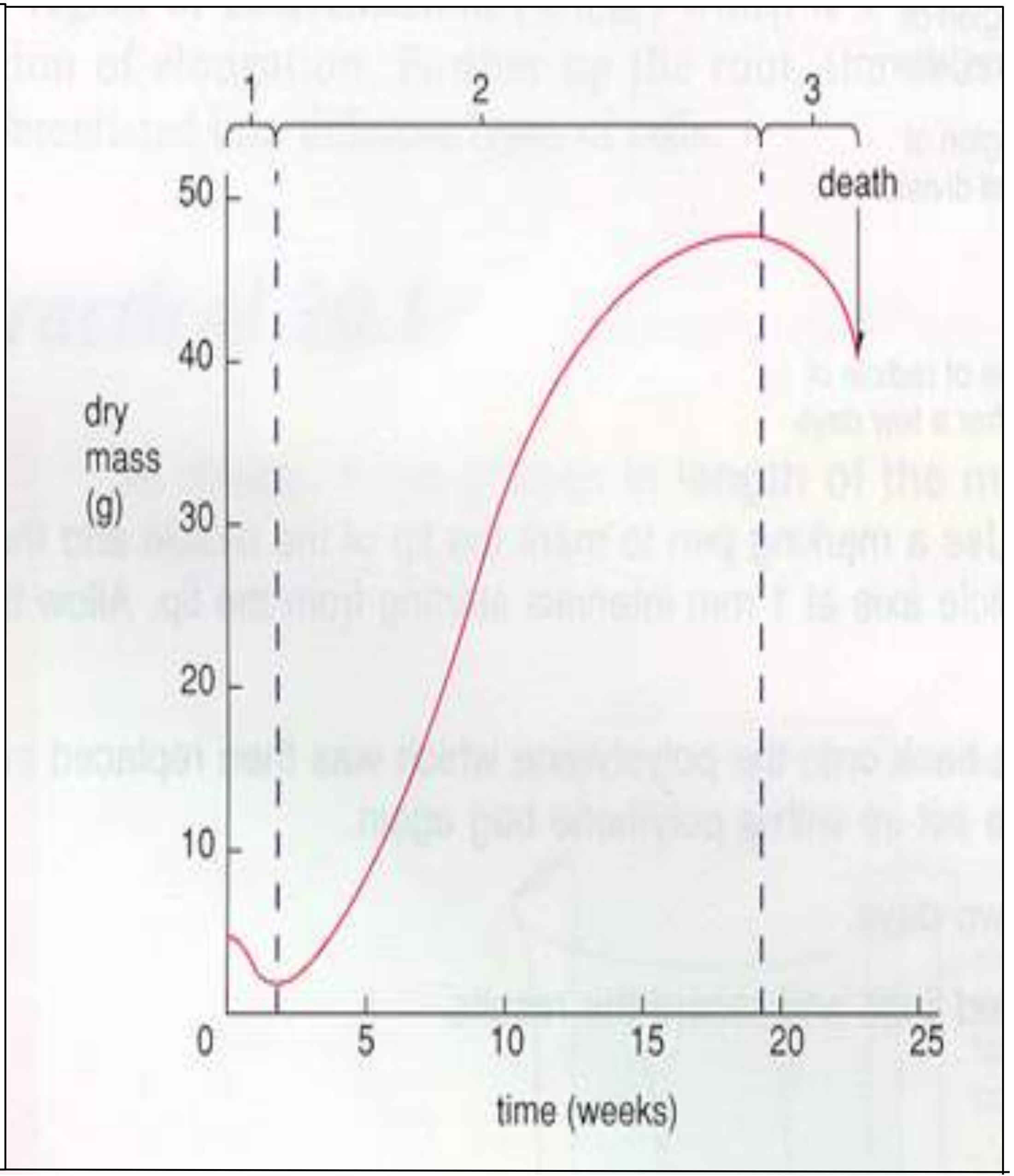
Macchina di Galton



La curva della crescita delle piante

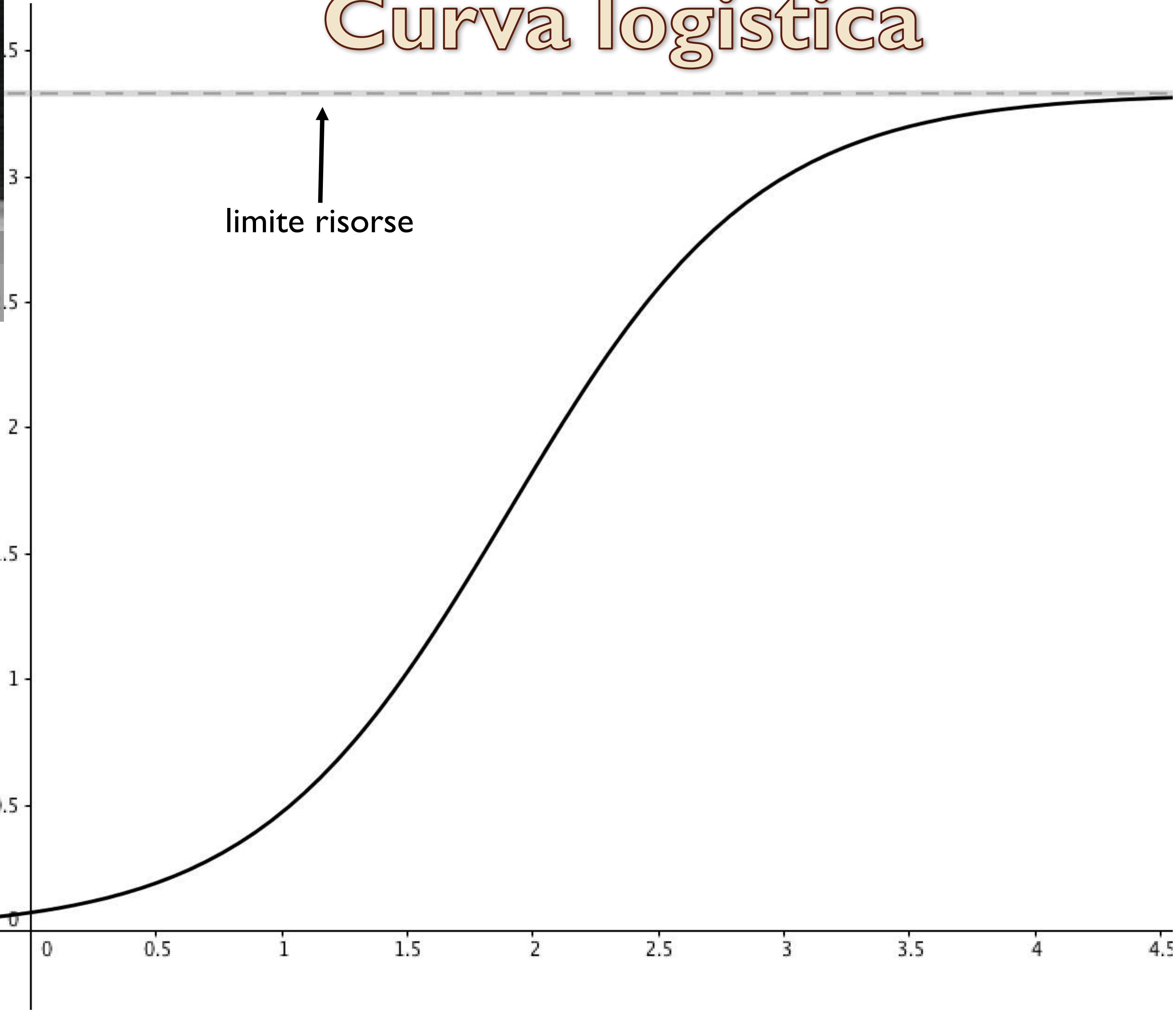
Le tre fasi nella crescita delle piante annuali:

1. La massa secca diminuisce durante la fase iniziale della germinazione perché la pianta consuma le riserve alimentari del seme
2. La massa cresce decisamente perché le foglie producono l'alimentazione necessaria con la fotosintesi
3. La massa decresce per la produzione dei semi o dei frutti

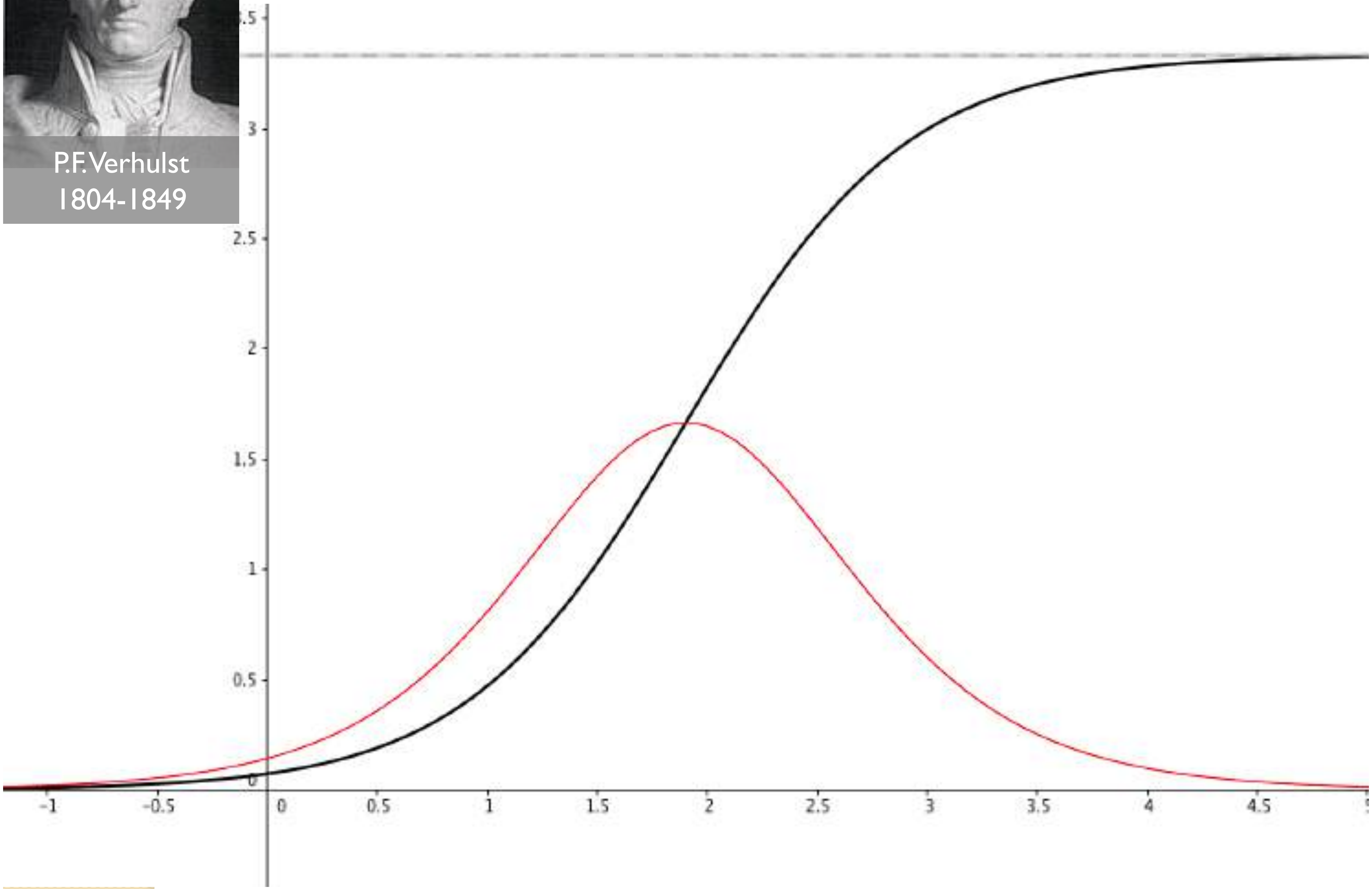


Curva logistica

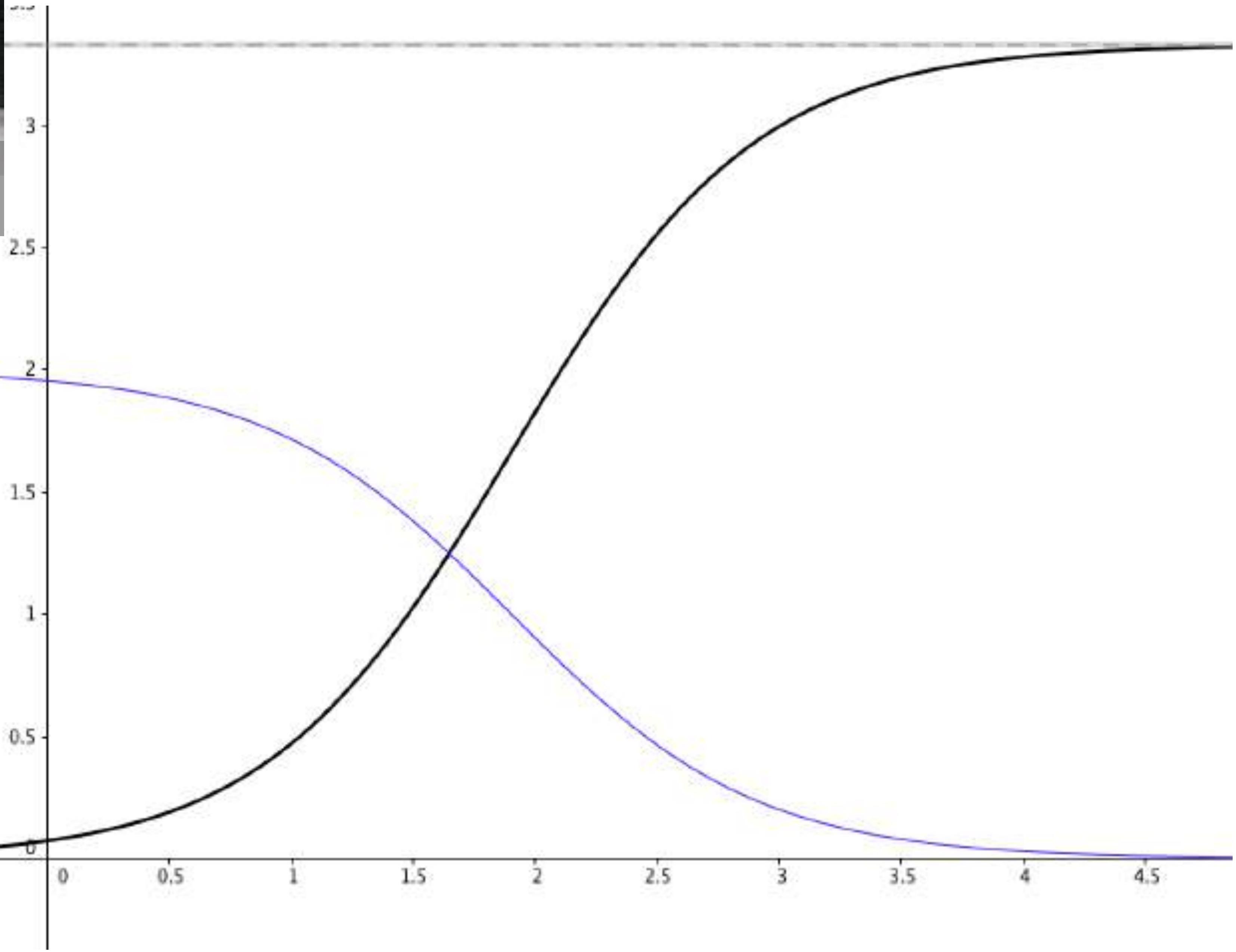
P.F. Verhulst
1804-1849



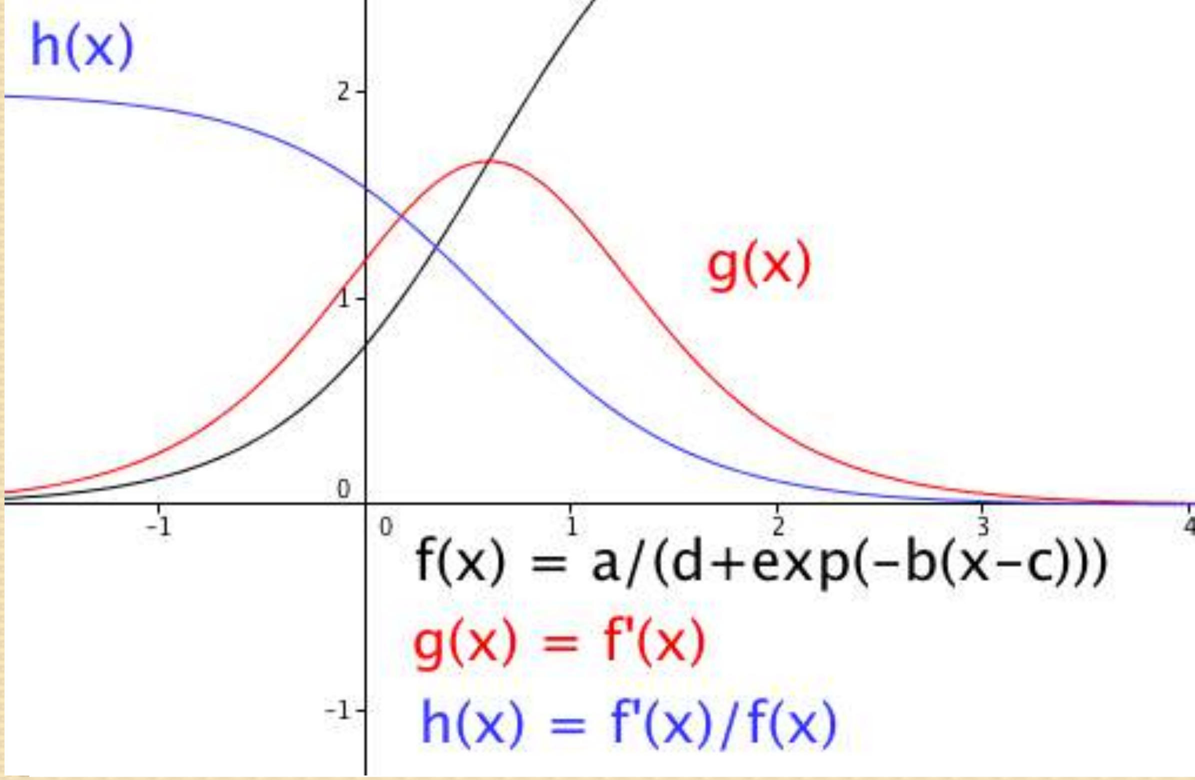
P.F. Verhulst
1804-1849

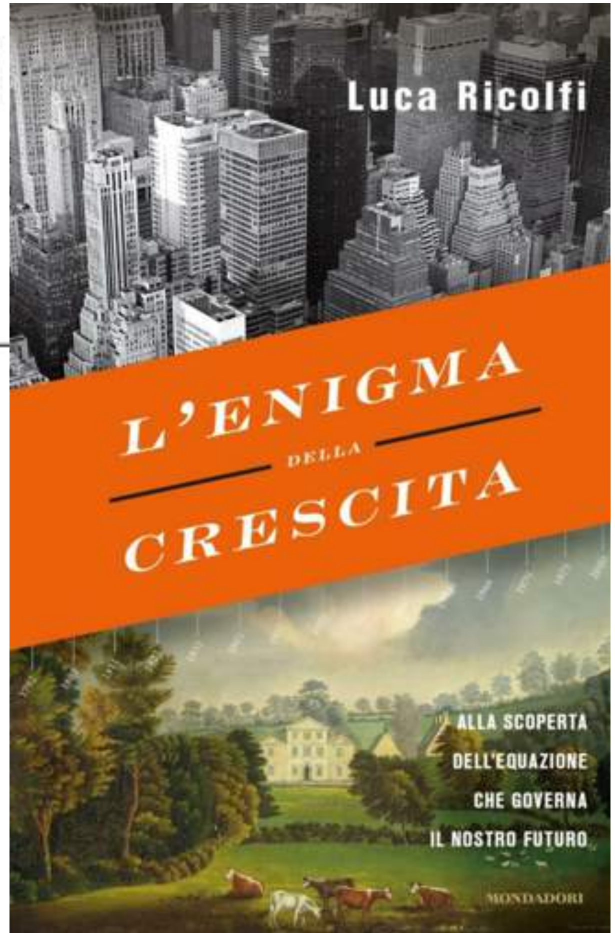


P.F. Verhulst
1804-1849



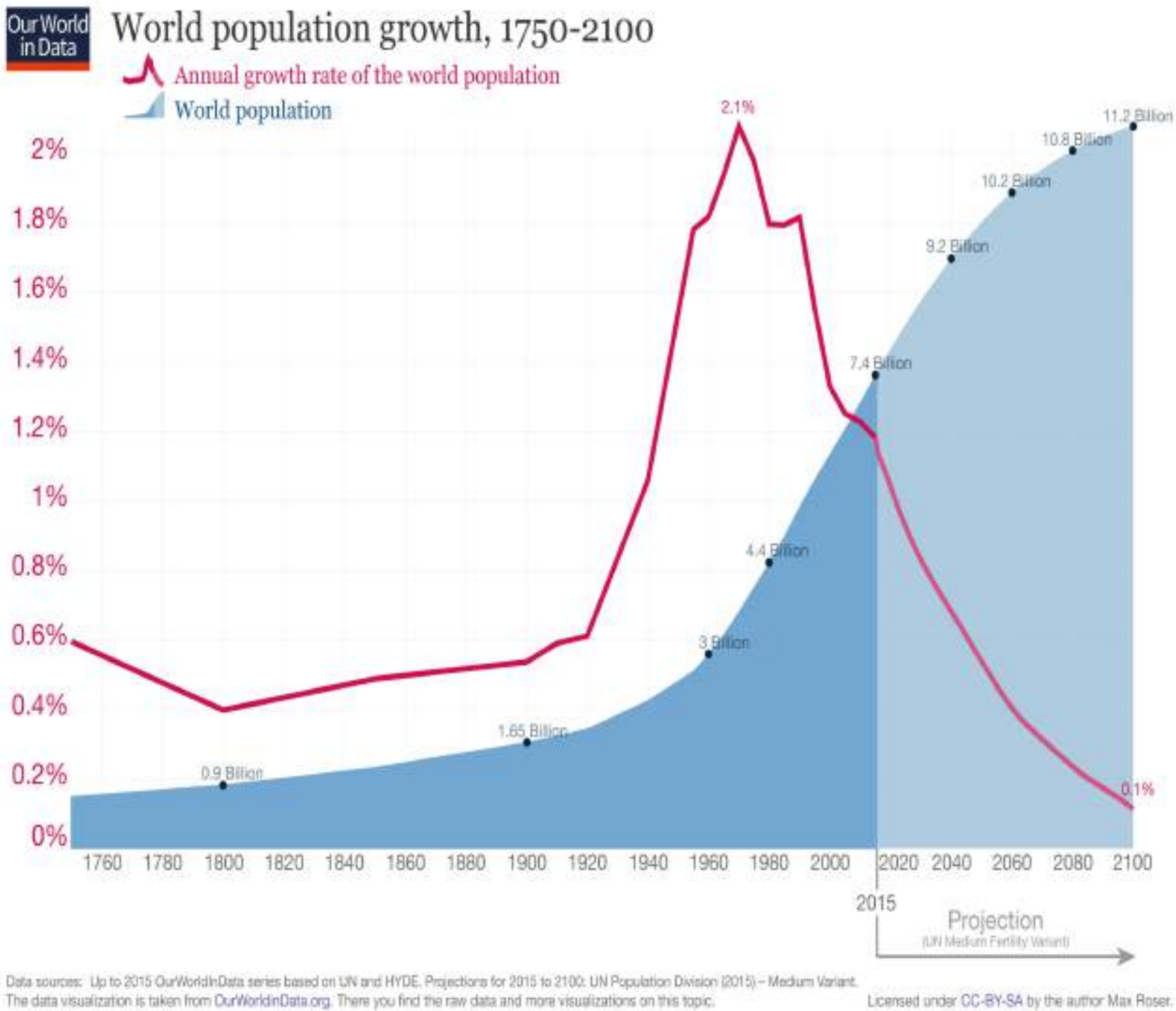
P.F. Verhulst
1804-1849



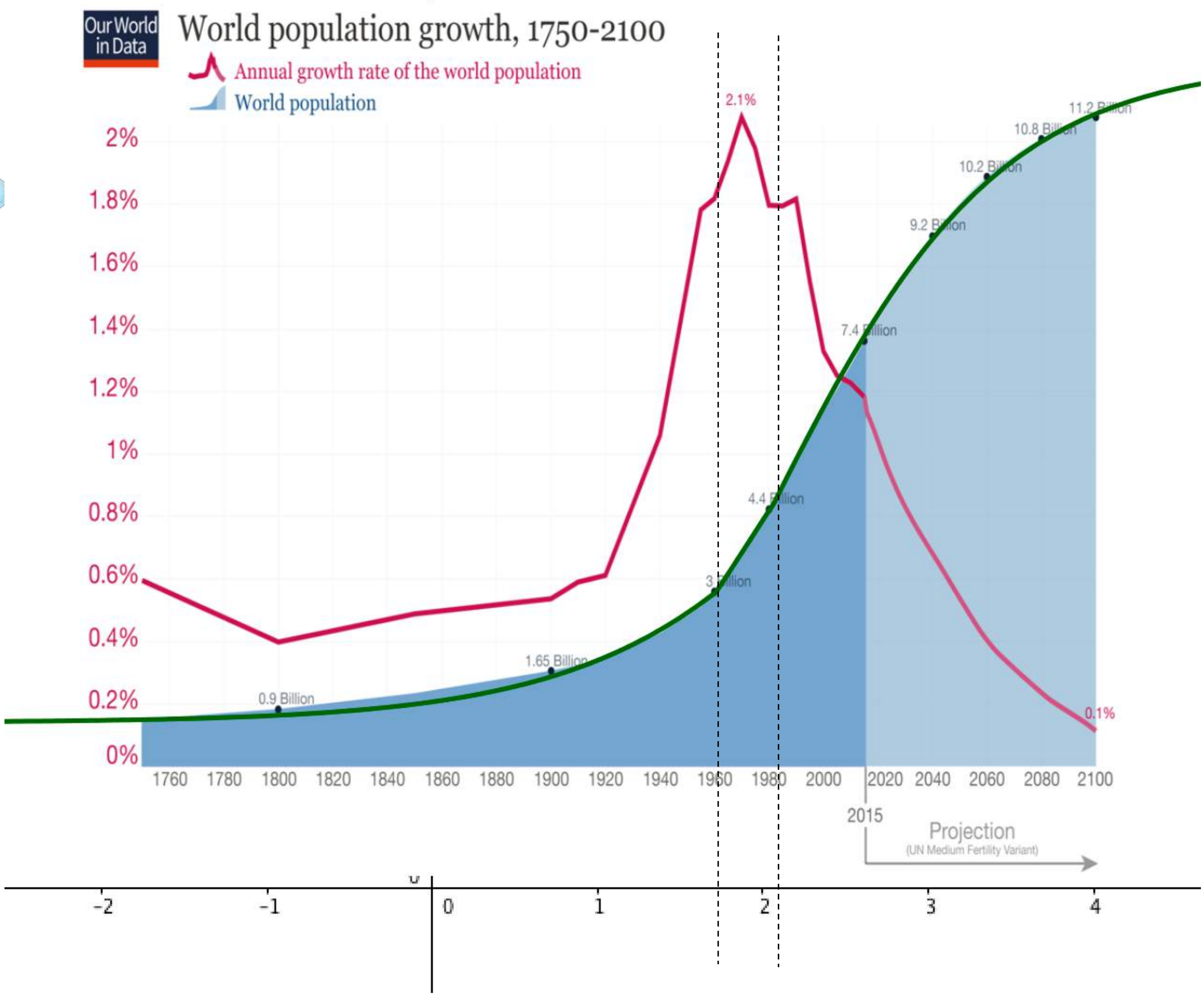


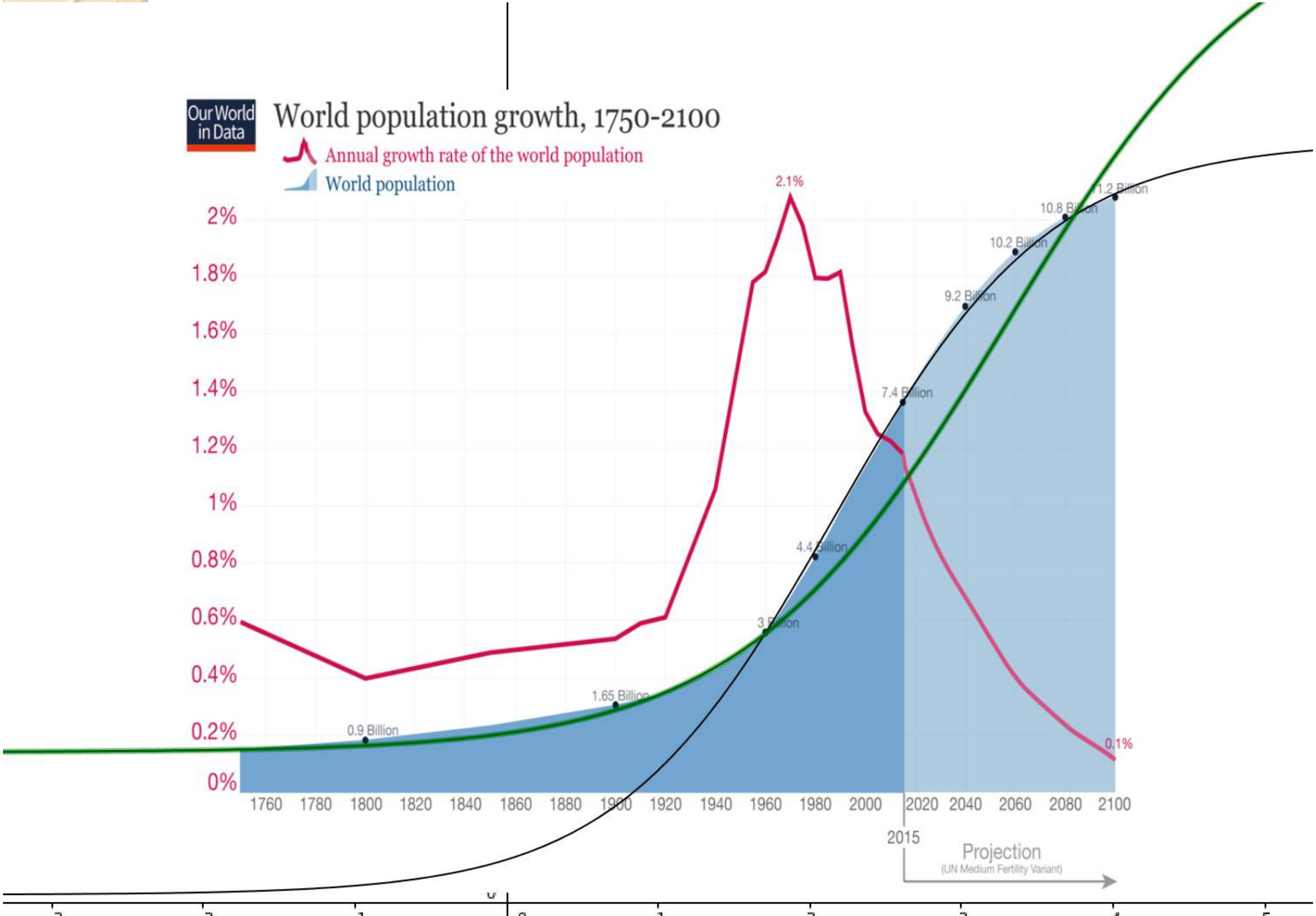
Verhulst 04

Fenomeni di crescita in biologia ed economia: ragionare sul cambiamento come educazione alla razionalità

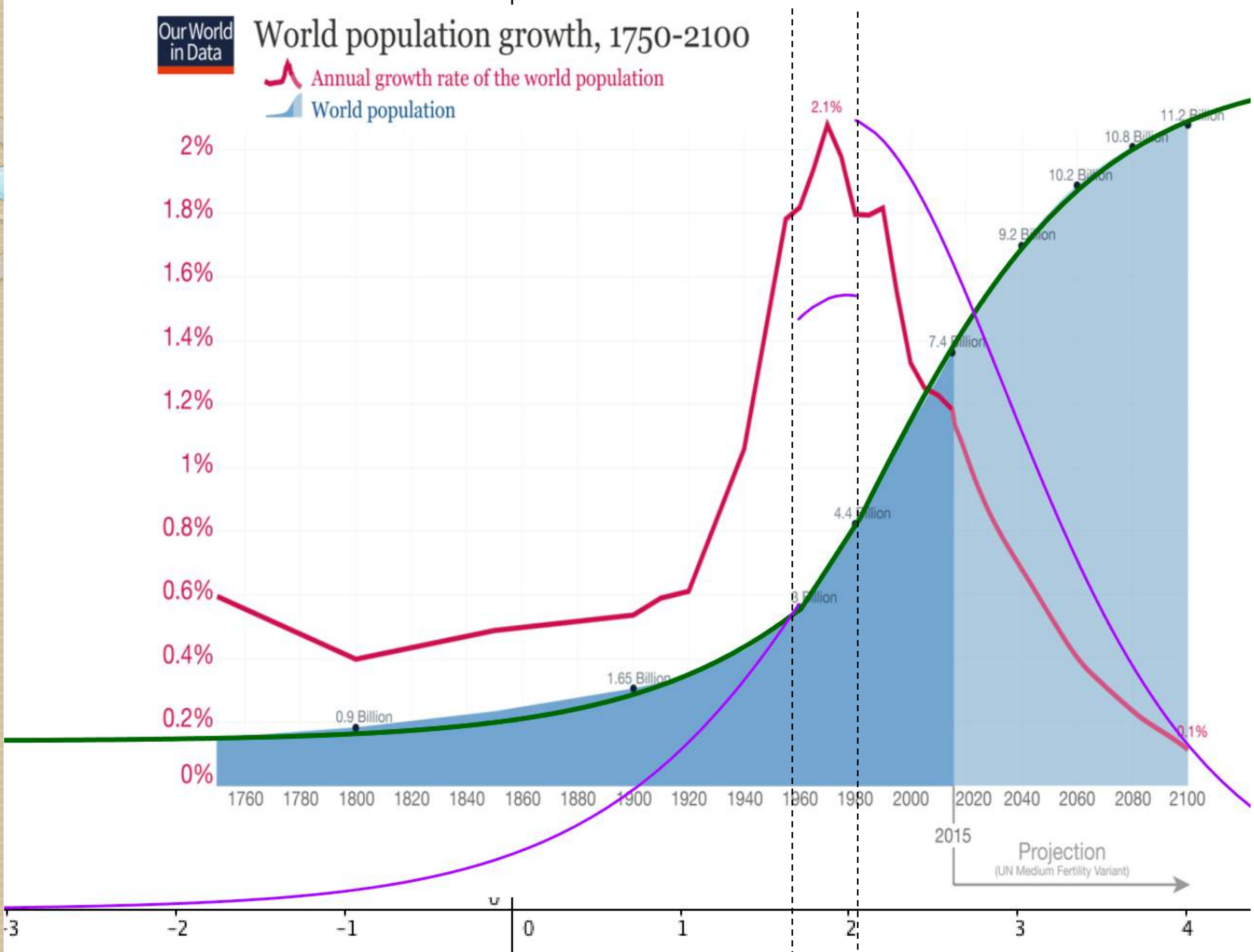


Our World in Data
World population growth, 1750-2100
Annual growth rate of the world population
World population
2%
1.8%
1.6%
1.4%
1.2%
1%
0.8%
0.6%
0.4%
0.2%
0%
2.1%
0.1%
0.9 Billion
1.65 Billion
3 Billion
4.4 Billion
7.4 Billion
9.2 Billion
10.2 Billion
10.8 Billion
11.2 Billion
1760
1780
1800
1820
1840
1860
1880
1900
1920
1940
1960
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100
2015
Projection
(UN Medium Fertility Variant)
Data sources: Up to 2015 OurWorldInData series based on UN and HYDE. Projections for 2015 to 2100: UN Population Division (2015) – Medium Variant.
The data visualization is taken from OurWorldinData.org. There you find the raw data and more visualizations on this topic.
Licensed under CC-BY-SA by the author Max Roser.


Our World in Data
World population growth, 1750-2100
Annual growth rate of the world population
World population
2%
1.8%
1.6%
1.4%
1.2%
1%
0.8%
0.6%
0.4%
0.2%
0%
2.1%
0.1%
0.9 Billion
1.65 Billion
4.4 Billion
7.4 Billion
9.2 Billion
10.2 Billion
10.8 Billion
11.2 Billion
1760
1780
1800
1820
1840
1860
1880
1900
1920
1940
1960
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100
2015
Projection
(UN Medium Fertility Variant)
-2
-1
0
1
2
3
4

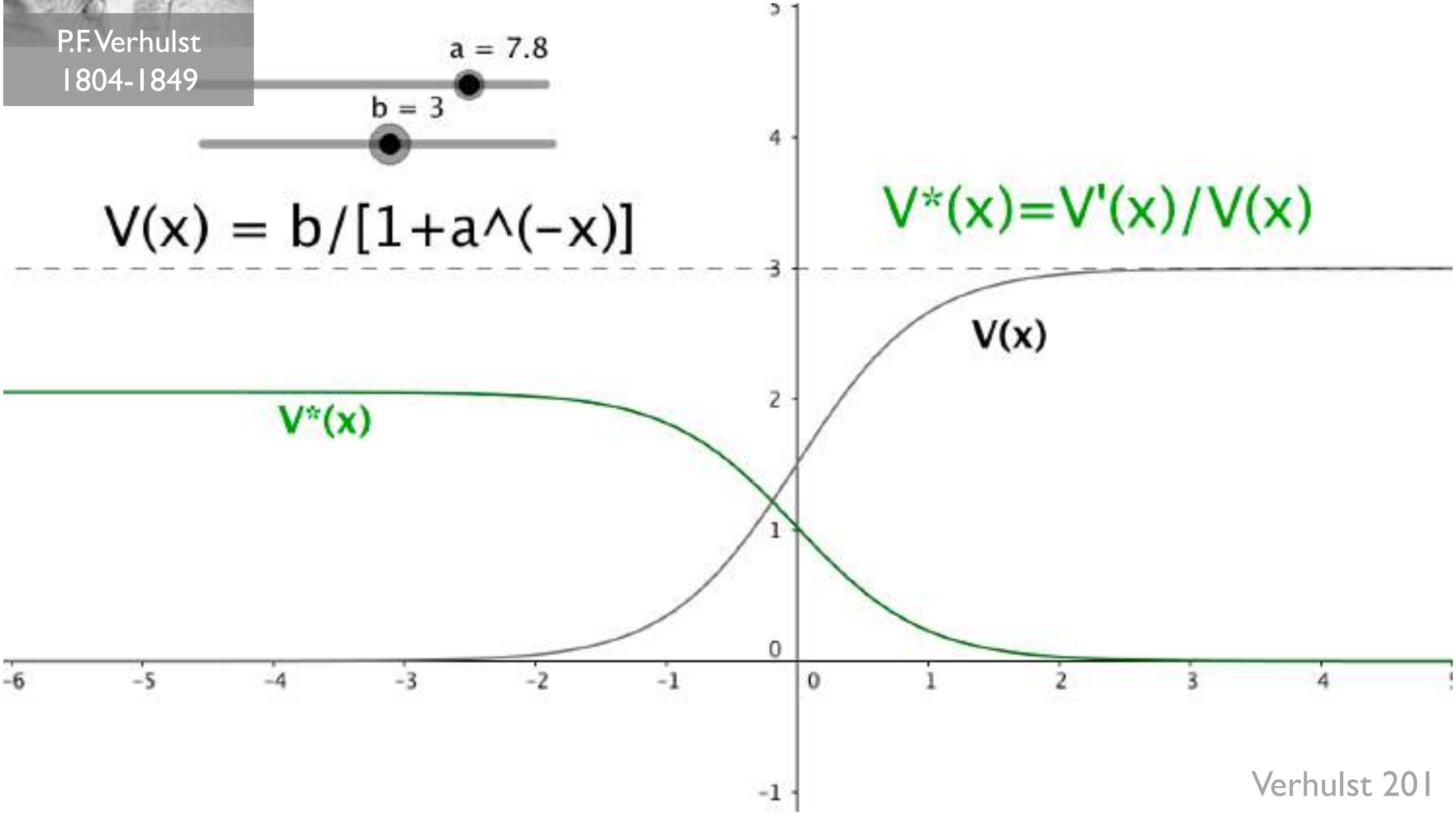


Our World in Data
World population growth, 1750-2100
Annual growth rate of the world population
World population
2.1%
2%
1.8%
1.6%
1.4%
1.2%
1%
0.8%
0.6%
0.4%
0.2%
0%
0.9 Billion
1.65 Billion
3 Billion
4.4 Billion
7.4 Billion
9.2 Billion
10.2 Billion
10.8 Billion
11.2 Billion
0.1%
1760 1780 1800 1820 1840 1860 1880 1900 1920 1940 1960 1980 2000 2020 2040 2060 2080 2100
2015
Projection
(UN Medium Fertility Variant)



Our World in Data
World population growth, 1750-2100
Annual growth rate of the world population
World population
2.1%
2%
1.8%
1.6%
1.4%
1.2%
1%
0.8%
0.6%
0.4%
0.2%
0%
0.9 Billion
1.65 Billion
3 Billion
4.4 Billion
7.4 Billion
9.2 Billion
10.2 Billion
10.8 Billion
11.2 Billion
0.1%
1760
1780
1800
1820
1840
1860
1880
1900
1920
1940
1960
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100
2015
Projection
(UN Medium Fertility Variant)
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

P.F. Verhulst
1804-1849



Sudore e matematica

Bricolage con le funzioni

Parabola 2

Polinomio

Verhulst

3D-2D

Temperature e altro

…

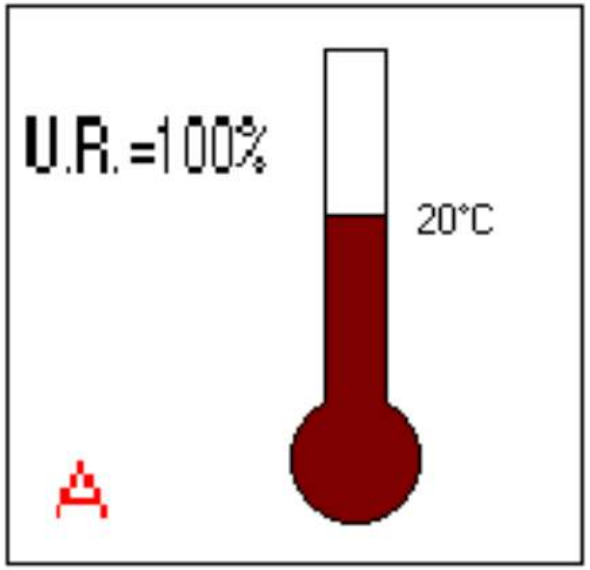
Quando la temperature è alta, il nostro corpo usa l'evporazione del sudore per raffreddarsi, e l'effetto di raffreddamento è direttamente legato alla velocità con cui il sudore evapora. Questa velocità dipende da quanta umidità c'è nell'aria e quanta l'aria ne può ancora assumere. Se l'aria è già satura di vapore il sudore non evapora. Il sistema di termoregolazione del corpo produce sudore nel tentativo di mantenere il corpo alla sua temperatura normale anche quando la velocità con cui produce sudore supera il tasso di evaporazione: così si può essere madidi di sudore nei giorni umidi anche senza generare calore addizionale del corpo (come nell'esercizio fisico).

L’umidità relativa (UR)

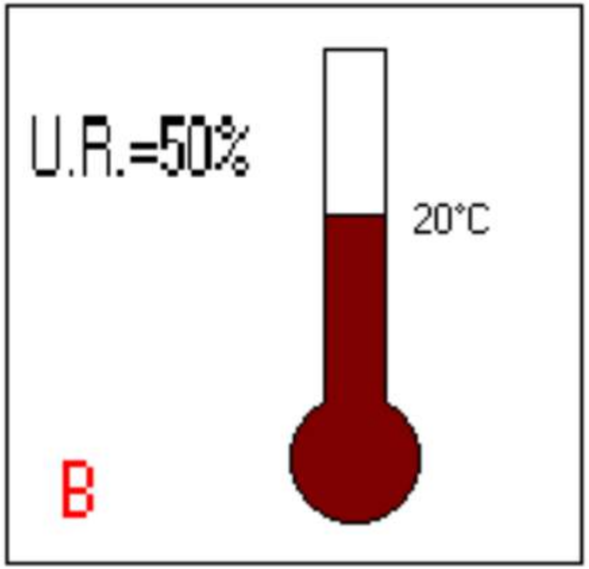
La quantità di vapore acqueo che può essere contenuto in un kg di aria secca non è illimitata: oltre una certa quantità il vapore aggiunto condensa sotto forma di minute goccioline (effetto nebbia). L’umidità relativa è la percentuale di vapore contenuto nell’aria in rapporto alla massima quantità in essa contenibile alla data temperatura.

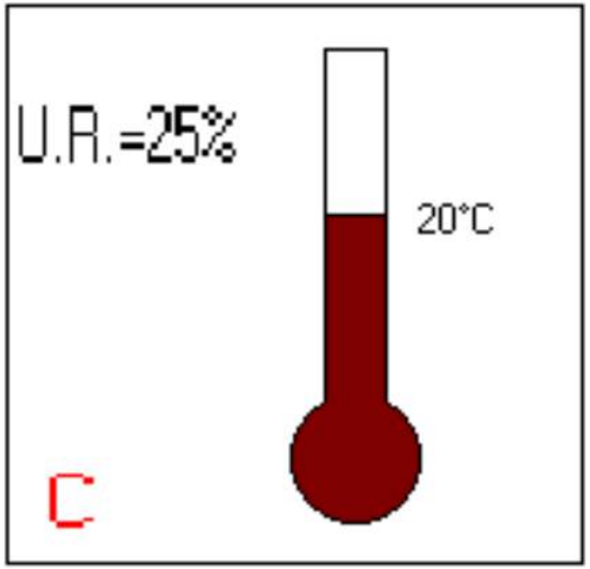
- Esempio: 1kg di aria alla temperatura a bulbo secco pari a 20°C può al massimo contenere 14.7g di vapor d'acqua (eventuale vapore aggiunto andrebbe a condensare); pertanto, la miscela costituita da 1kg di aria secca e da 14.7g di vapore acqueo ha, alla temperatura di 20°C, un'umidità relativa pari al 100% (condizioni di saturazione); alla stessa temperatura, se in 1kg di aria secca ci fossero 7.35g di vapore (cioè la metà della massima quantità di vapore miscibile a 20°C), la miscela si troverebbe ad un'umidità relativa del 50%:

1 kg di aria secca contenente 14.7g di vapor d'acqua

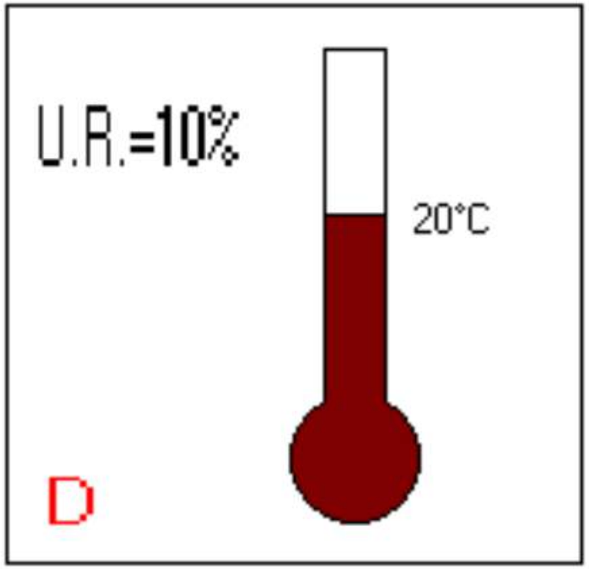


1 kg di aria secca contenente 7.35g di vapor d'acqua





1 kg di aria secca contenente 3.675g di vapor d'acqua

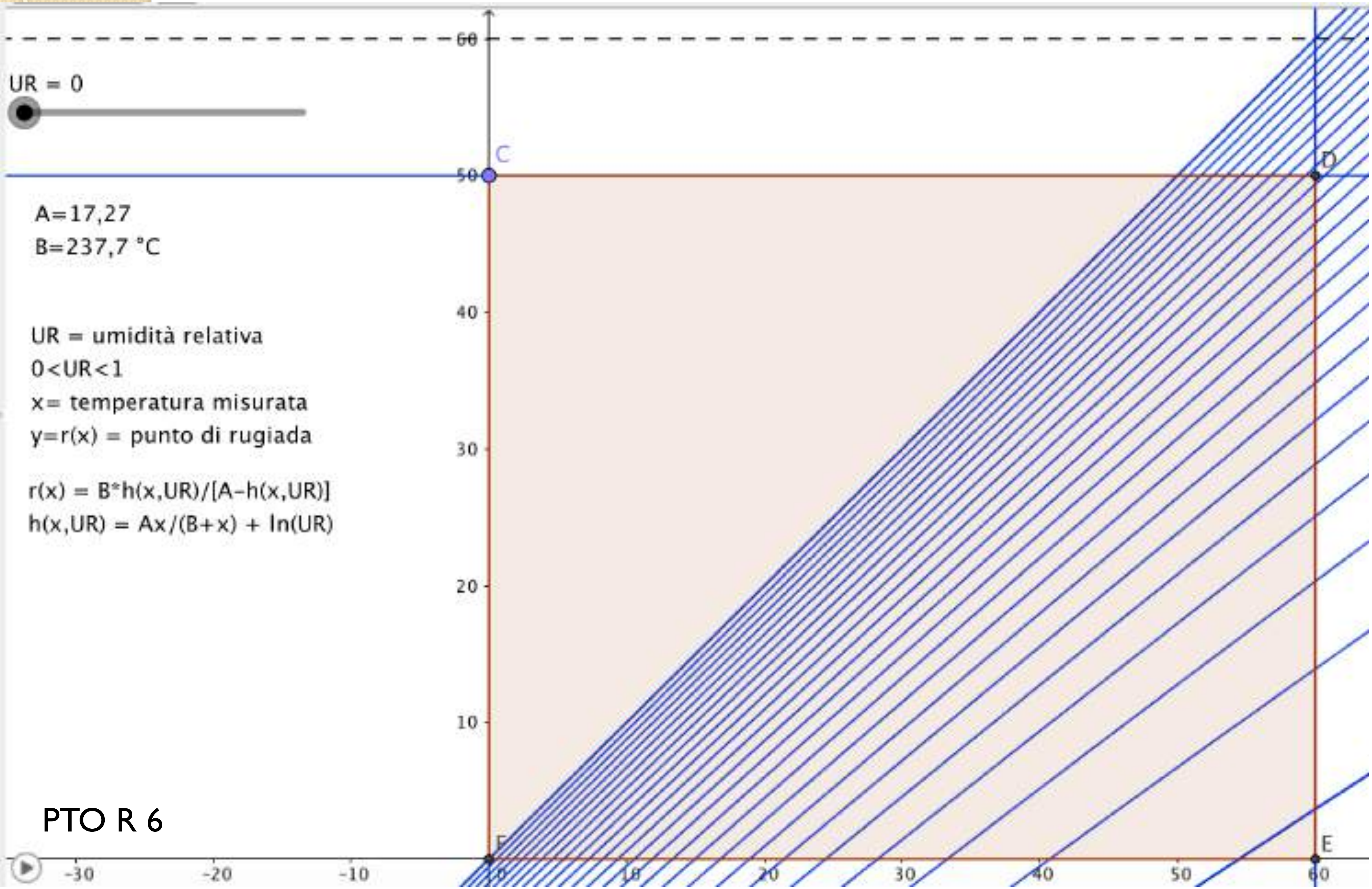


1 kg di aria secca contenente 1.47g di vapor d'acqua

Il punto di rugiada

Il **punto di rugiada** è la temperatura a cui il vapor acqueo in un campione di aria a pressione barometrica costante condensa in acqua (liquida) alla stessa velocità con cui evapora.
A temperatura inferiore, la velocità di condensazione supera quella di evaporazione: quindi si forma acqua liquida. L’acqua condensata si chiama rugiada quando si forma su di una superficie solida, o brina se congela. L’acqua condensata è detta nebbia o nuvola: dipende dall’altezza a cui si forma nell’aria.

Il PR dipende dalla temperatura (T) e dall'umidità relativa (UR).



HUMIDEX

	25%	30%	35%	40%	45%	50%	55%	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%
42°	48	50	52	55	57	59	62	64	66	68	71	73	75	77	80	82
41°	46	48	51	53	55	57	59	61	64	66	68	70	72	74	76	79
40°	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75
39°	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	66	68	70	72
38°	42	44	45	47	49	51	53	55	56	58	60	62	64	66	67	69
37°	40	42	44	45	47	49	51	52	54	56	58	59	61	63	65	66
36°	39	40	42	44	45	47	49	50	52	54	55	57	59	60	62	63
35°	37	39	40	42	44	45	47	48	50	51	53	54	56	58	59	61
34°	36	37	39	40	42	43	45	46	48	49	51	52	54	55	57	58
33°	34	36	37	39	40	41	43	44	46	47	48	50	51	53	54	55
32°	33	34	36	37	38	40	41	42	44	45	46	48	49	50	52	53
31°	32	33	34	35	37	38	39	40	42	43	44	45	47	48	49	50
30°	30	32	33	34	35	36	37	39	40	41	42	43	45	46	47	48
29°	29	30	31	32	33	35	36	37	38	39	40	41	42	43	45	46
28°	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
27°	27	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
26°	26	26	27	28	29	30	31	32	33	34	34	35	36	37	38	39
25°	25	25	26	27	27	28	29	30	31	32	33	34	34	35	36	37
24°	24	24	24	25	26	27	28	28	29	30	31	32	33	33	34	35
23°	23	23	23	24	25	25	26	27	28	28	29	30	31	32	32	33
22°	22	22	22	22	23	24	25	25	26	27	27	28	29	30	30	31

HUMIDEX

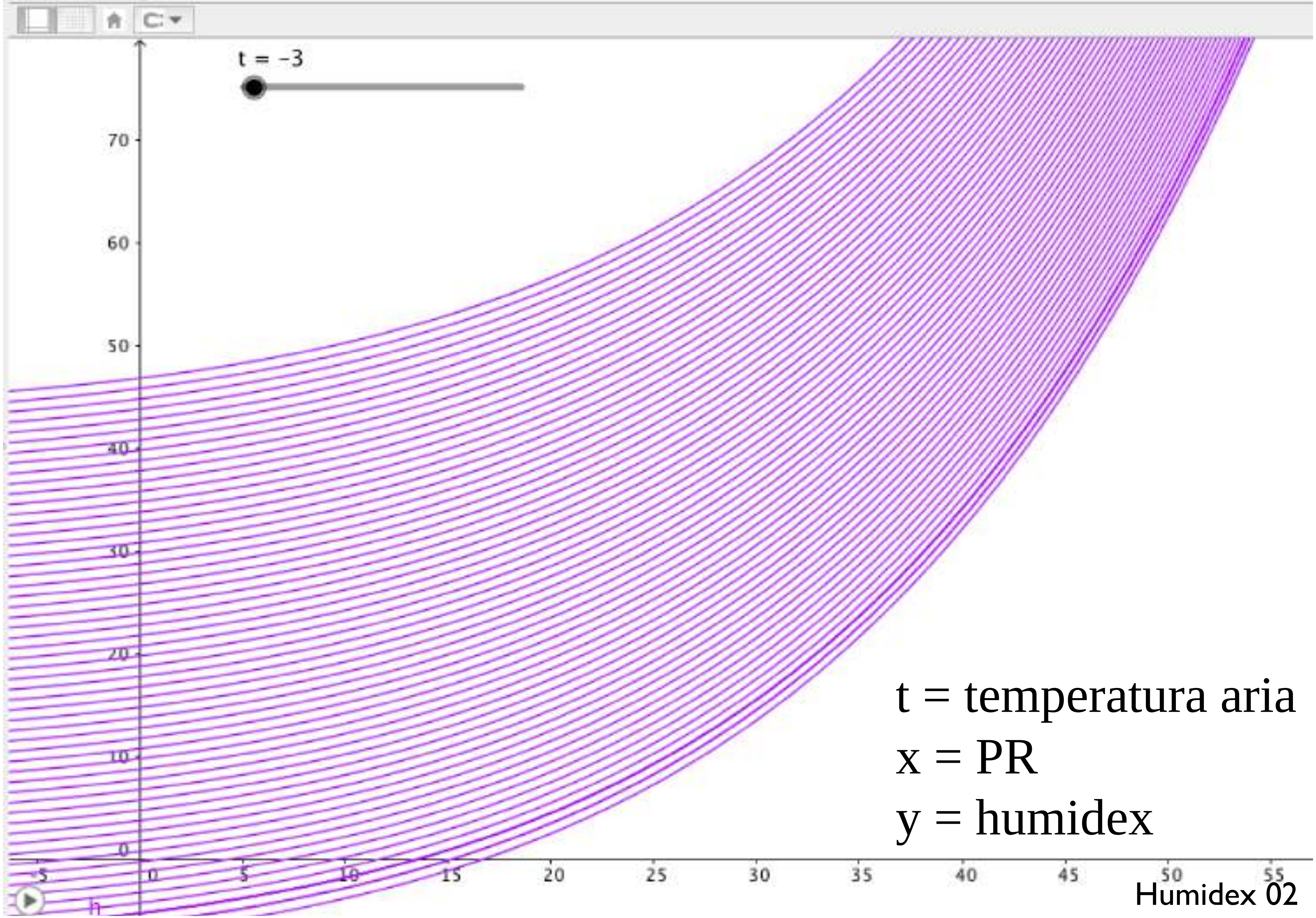
L’humidex (indice di umidità) è un indice utilizzato dai meteorologi canadesi per descrivere la percezione del calore da parte della persona media, combinando l'effetto della temperatura e dell'umidità.

Humidex =

$$T_{\mathrm{air}} + 0.5555\left[6.11e^{5417.7530\left(\frac{1}{273.16}-\frac{1}{273.15+T_{\mathrm{dew}}}\right)} - 10\right]$$

T_{air} = temperatura dell'aria

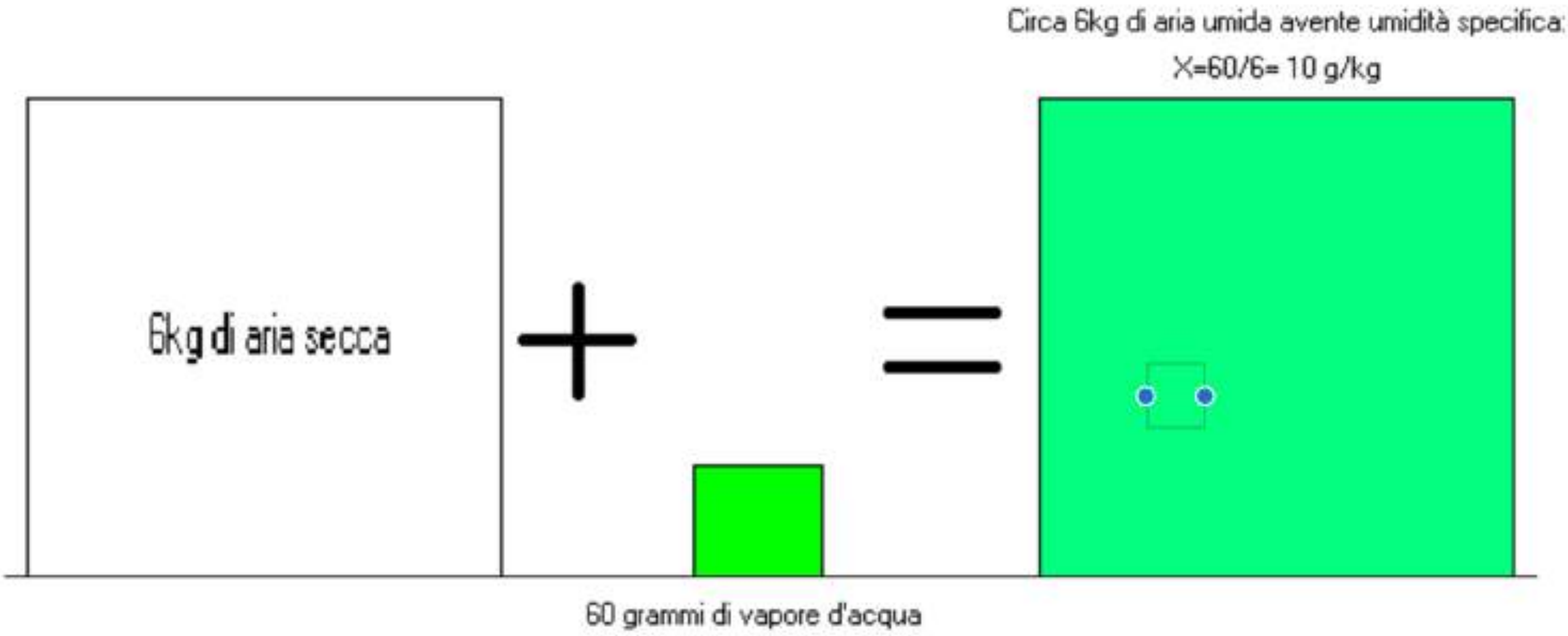
T_{dew} = punto di rugiada



t = temperatura aria
x = PR
y = humidex

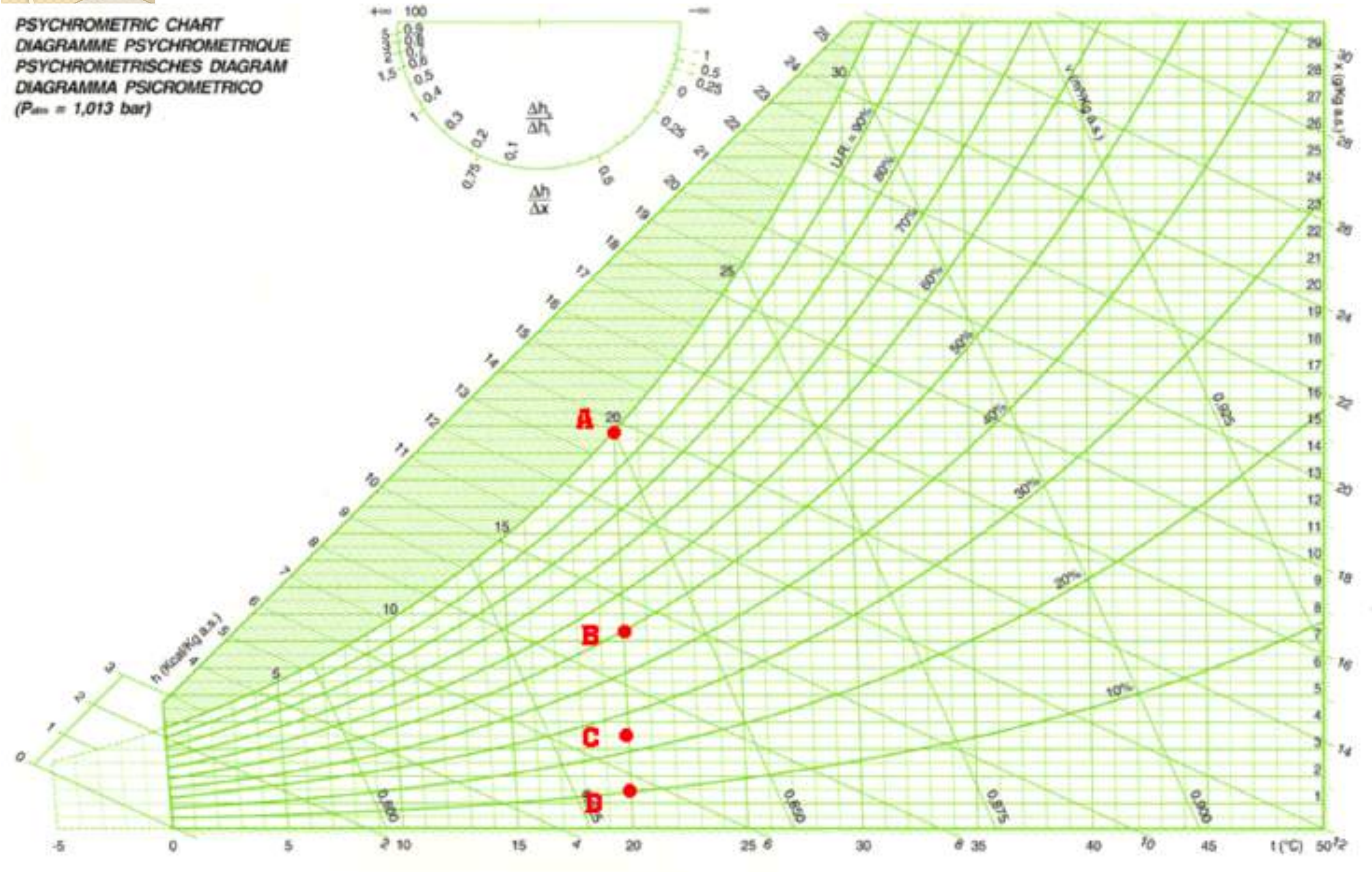
Umidità specifica US (g/Kg)

L'aria che ci circonda è una miscela di aria secca e vapore d'acqua; l'umidità specifica indica quanti grammi di vapore acqueo sono presenti in ogni kg di aria secca.

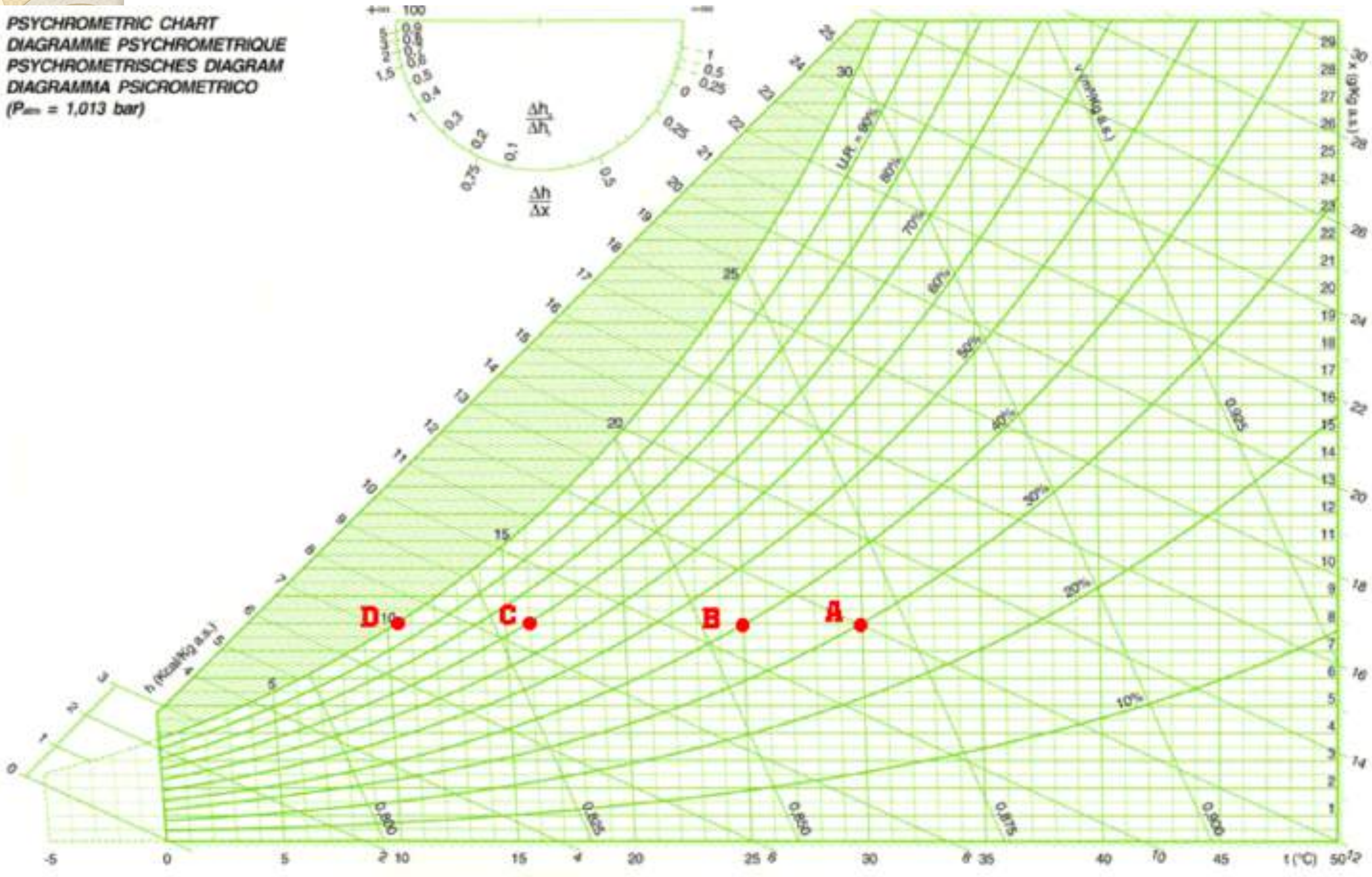


Temperatura
Punto di rugiada
Umidità relativa
Umidità specifica

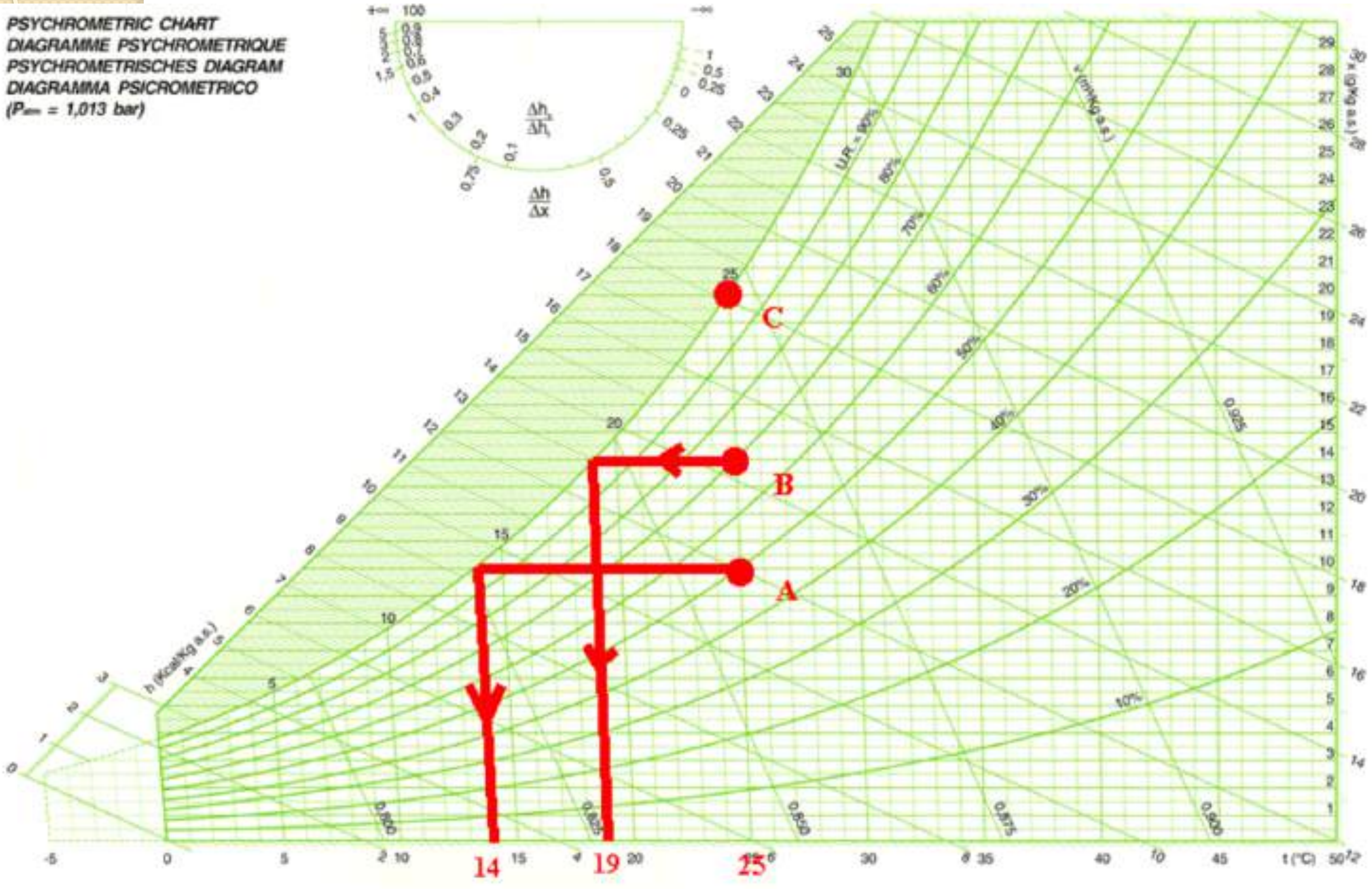
Come variano UR e US a parità di T

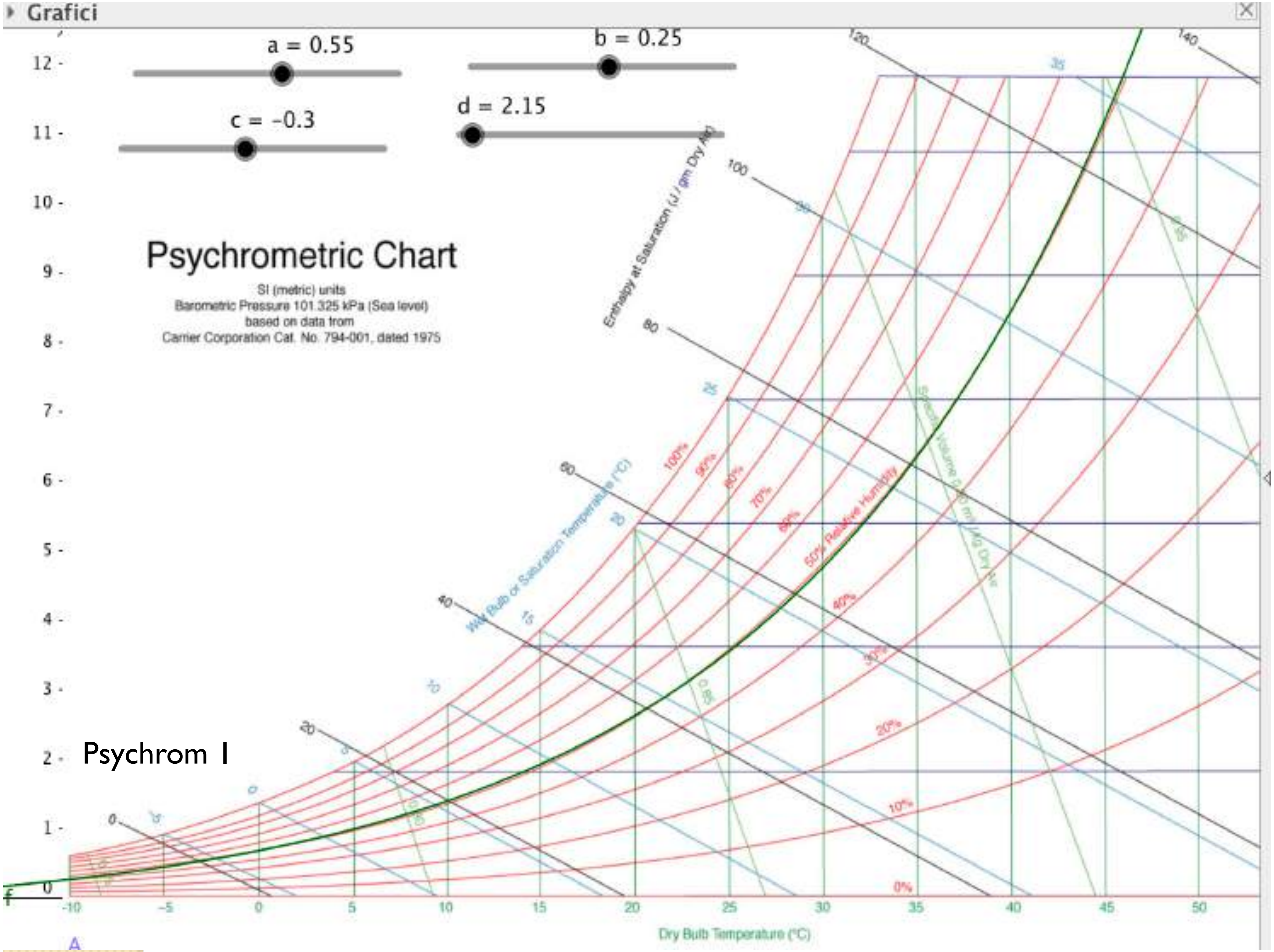


Come variano UR e T a parità di US



Punto di rugiada a partire da T e UR





Grafici
a = 0.55
b = 0.25
c = -0.3
d = 2.15
Psychrometric Chart
SI (metric) units
Barometric Pressure 101.325 kPa (Sea level)
based on data from
Carrier Corporation Cat. No. 794-001, dated 1975
Enthalpy at Saturation (J / gm Dry Air)
Wet Bulb or Saturation Temperature (°C)
50% Relative Humidity
Specific Volume
Dry Bulb Temperature (°C)
Psychrom 1

Tiriamo le fila

Uniformità metodologica

a) l'apprendimento attivo
b) il metodo della ricerca variata
c) le simulazioni dinamiche

l'apprendimento attivo

- È oggi ampiamente accettato che l'apprendimento finalizzato alla **comprensione** può avvenire solo quando gli allievi adottano un approccio in cui lavorano in modo attivo al materiale didattico e si impegnano in processi "più profondi", come domande, ricerca di strutture e creazione di astrazioni.

l’apprendimento attivo

Varie ricerche hanno mostrato che l'apprendimento attivo contribuisce anche allo sviluppo di **conoscenze trasferibili**.

Questo modo di apprendere e la creazione della conoscenza stimola gli studenti a connettere nuove informazioni alla propria base di conoscenze esistenti.

Gli studenti devono disporre di nuove informazioni situate in contesti reali o realistici (**campi di esperienza**) per promuovere questo trasferimento.

l’apprendimento attivo

Questo discorso non è nuovo.
Dewey (1916), per esempio, ha già sottolineato l'importanza di "fare" scienza, matematica e storia per acquisire la comprensione di questi settori.
"Fare" significa che gli studenti astraggono, scoprono e dimostrano.
Anche nel lavoro di Bruner, l'apprendimento è visto come un processo attivo in cui gli studenti sviluppano nuove idee basate su conoscenze precedenti (Bruner, 1973).

l’apprendimento attivo

Gli approcci contemporanei nella matematica e alle scienze cercano di progettare condizioni che stimolino e sostengano i discenti ad impegnarsi in processi di apprendimento attivi che forniscono conoscenze concettuali basandosi anche sul **supporto tecnologico**.

I metodi più recenti utilizzano spesso le **TIC** per facilitare l'apprendimento concettuale. Essi si basano sulla capacità interattiva e dinamica delle TIC. tra questi, vi è l'utilizzo di microprogetti o simulazioni.

b. Il metodo della ricerca variata

Riassumiamo in uno schema quanto abbiamo visto negli esempi:

I. Una situazione: osservare (O_i), formulare domande (D_j), dare risposte (R_k)

Perché è così?

II. Modificare una (o più) Oi negandola (quindi variando la situazione) → (~ O_i).

III. Nascono nuove osservazioni (O_i)*, ulteriori domande (D_j)*, e nuove risposte (R_k)*.

Che cosa capita se non è così?

MRV varia la situazione e favorisce così la comprensione

MRV

Per capire meglio qualcosa consideriamola da più punti di vista e variamone le sue proprietà a una a una, "per vedere l'effetto che fa".

La teoria della variazione, dalla pedagogia cinese classica:

- **CONTRASTO**: *Per avere esperienza di qualcosa una persona deve fare esperienza di qualcosa di diverso per fare un confronto.*
- **GENERALIZZAZIONE**: *Per capire che cosa è 'tre' devo fare esperienza di una varietà di situazioni in cui 'tre' appare.*
- **SEPARAZIONE**: *Per fare esperienza di un certo aspetto di qualcosa e al fine di separare questo aspetto da altri aspetti, bisogna variarlo mentre gli altri aspetti non cambiano.*
- **FUSIONE**: *Se ci sono vari aspetti critici che chi apprende deve prendere in considerazione insieme, di essi deve fare esperienza simultaneamente.*

(Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M., 2004, p. 16)

MRV promuove il pensiero ipotetico

Le attività argomentative in cui si producono ipotesi o si generano condizionalità sono riconducibili a due modalità principali

[…]

La prima modalità è caratterizzata dalla produzione di *congetture interpretative* di ciò che si vede (percepisce), ad es. al fine di organizzarlo.

La seconda è caratterizzata dalla produzione di *congetture previsionali* (ad es. ipotesi su una situazione futura).

(Dalla Matematica per il Cittadino, 2001)

Si può intendere in generale l'attività argomentativa come un discorso:

- che permette al soggetto di tornare su ciò che si è fatto, visto (ecc.), producendo interpretazioni, spiegazioni, risposte a domande del tipo "perché è così?"

- che permette al soggetto di anticipare fatti, situazioni, ecc., producendo previsioni, discorsi ipotetici su mondi possibili, risposte a domande "come sarà?", "come potrebbe essere?"

Lo sviluppo di MRV in classe può servire: MRV

- *in negativo*, come antidoto ai fini di "prevenire/scardinare una visione della matematica e delle scienze ridotte a un insieme di regole da memorizzare e applicare".
- *in positivo*, come strumento trasversale che: sviluppa *un'adeguata visione della matematica* e *delle scienze, non ridotte a un insieme di regole da memorizzare* e *applicare, ma riconosciute* e *apprezzate come contesto per affrontare* e *porsi problemi significativi*, in cui sia supportata adeguatamente la **costruzione di competenze.**


competenze
come ricercatore
investigatore matematico

MRV muove da strategie “naturali” nella vita di tutti i giorni.

L’insegnante, promuovendolo MRV nelle sue pratiche didattiche favorisce così la transizione al contesto matematico e scientifico.

Permette così la costruzione di competenze, in cui le **conoscenze** si intrecciano con le **competenze argomentative** degli allievi in situazioni in cui sono coinvolti come **investigatori matematico-scientifici** a **risolvere** e a **porsi dei problemi.**

MRV

MRV induce un atteggiamento aperto alla ricerca, in cui **l'allievo in quanto investigatore / ricercatore**:

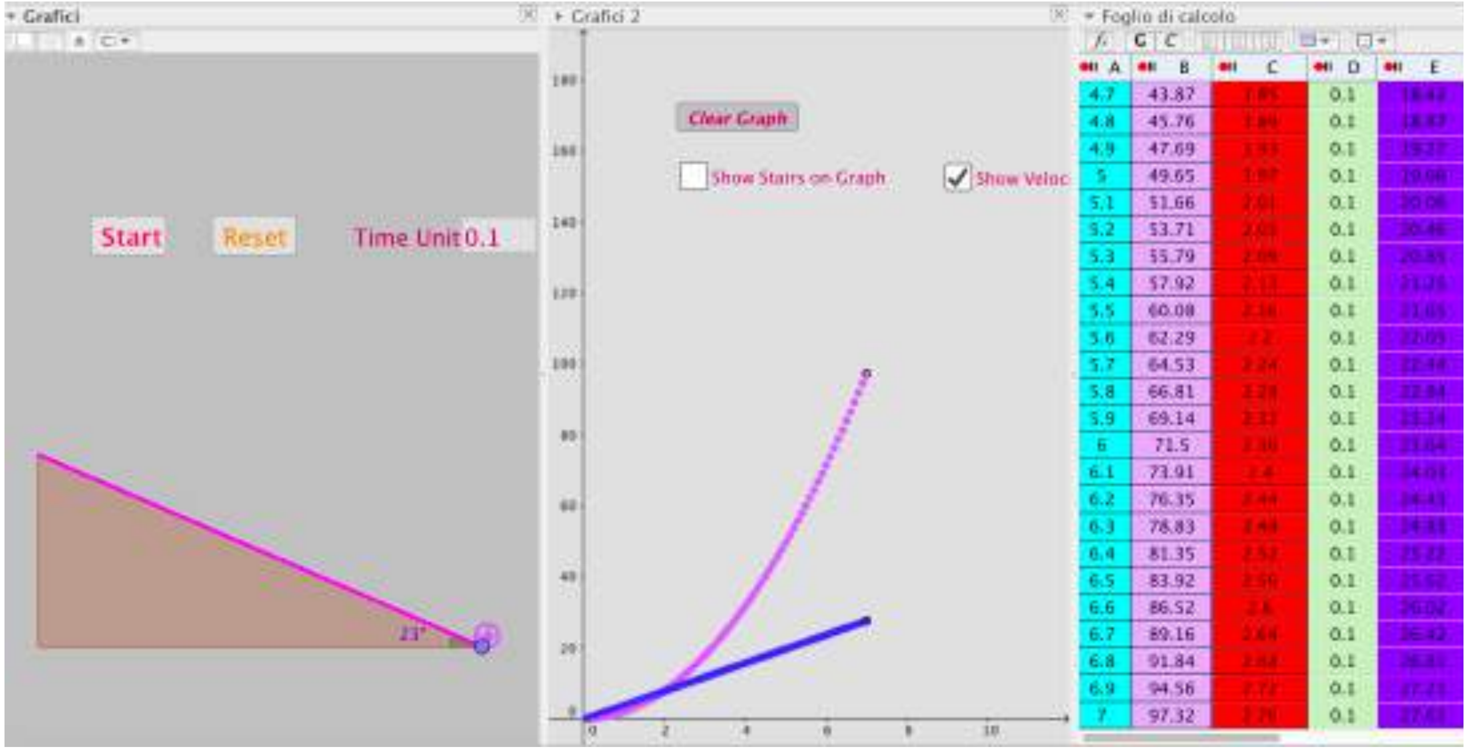
- pone e si pone problemi;
- produce ipotesi, definizioni, argomentazioni;
- non è imbalsamato nel tipico schema chiuso: situazione data → risolvi/dimostra.

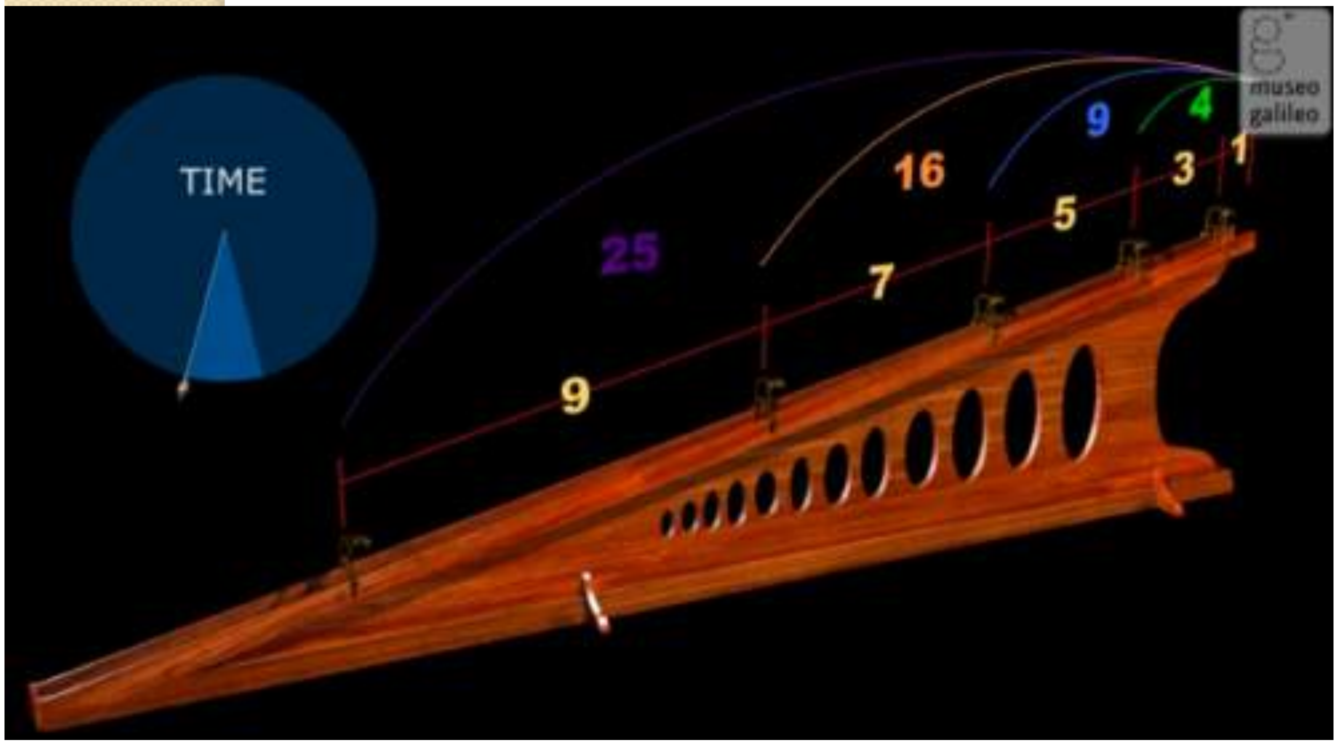
Questi obiettivi corrispondono a quanto scritto sia nei *Traguardi* (I ciclo) sia nel *Profilo educativo culturale e professionale dello studente* (Licei, Istituti Tecnici).

Vantaggi educativi e cognitivi del MRV

Le variazioni sono generate dagli stessi studenti (con l'aiuto dell'insegnante: più accentuato all'inizio, si attenua progressivamente mentre il metodo diventa via via più familiare agli allievi): il loro controllo sui problemi da porre cresce generando una concezione più ampia di che cosa è un problema e un loro maggiorecoinv olgimento emotivo.

Ciò muta il loro senso per la matematica: in quanto ricercatori / investigatori matematici imparano a sviluppare il **senso matematico delle cose**, cioè a **pensare matematicamente**.





Le simulazioni in ambienti virtuali di apprendimento

Molti degli ambienti di apprendimento “tecnologici” (ad esempio, molti applet, GeoGebra) si concentrano sul fornire agli studenti l'opportunità di simulare e manipolare oggetti o fenomeni.
È importante che questi ambienti offrano anche il necessario supporto didattico per le attività.

Vantaggi di utilizzare le simulazioni:

1. Le simulazioni possono aiutare gli studenti a tradurre tra rappresentazioni multiple.
Le simulazioni contengono sistemi fisici rappresentati in molti modi diversi in due o tre dimensioni: immagini, grafici, parole, equazioni, diagrammi, tabelle di dati, mappe di contorno ecc.
Gli studenti possono avere un senso dei concetti visionando la connessione tra le rappresentazioni e come una variabile ne influenzi un'altra.

Vantaggi di utilizzare le simulazioni:

2. Le simulazioni possono aiutare gli studenti a costruire modelli mentali di sistemi fisici, chimici o biologici.
Le simulazioni consentono agli studenti di visualizzare i concetti che appaiono nei manuali o ascoltano dai loro insegnanti nelle lezioni.
Usando la simulazione possono vedere una situazione concreta che li aiuta a costruire un modello mentale.

Vantaggi di utilizzare le simulazioni:

3. Le s. permettono agli studenti esperienze di apprendimento impegnative, pratiche e attive e garantiscono loro il controllo mentre esplorano concetti e fenomeni scientifici.
4. Le s. aiutano gli studenti a comprendere le equazioni come relazioni fisiche tra le misurazioni delle osservazioni.

Quando nelle s. gli studenti sono in grado di variare i parametri e vedere l'effetto di queste variazioni, il ruolo delle equazioni è fortemente arricchito.

Vantaggi di utilizzare le simulazioni:

5. Le s. stimolano la collaborazione. Per es., gli studenti che lavorano in gruppi possono utilizzare una s. per spiegare e descrivere l'uno all'altro quanto hanno compreso.

6. Le s. consentono agli studenti di indagare fenomeni che non potrebbero essere sperimentati in una classe o in un laboratorio. Per es. gli studenti possono avere accesso a ricerche e attrezzature non comunemente disponibili in classe.

L'integrazione delle simulazioni nelle pratiche quotidiane di classe non richiede attrezzature sofisticate: computer, proiettore LCD, possibilmente una connessione a Internet (ma vanno bene anche i CD-ROM se del caso).

Gli studenti possono anche accedere a simulazioni individualmente in un laboratorio informatico o in un ambiente laptop.

I requisiti più comuni per l'utilizzo delle simulazioni sono i plug-in gratuiti (Flash, Shockwave, QuickTime, Java)

La maggior parte delle simulazioni sono sotto forma di Java Applet.

In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.

(G. Cantor, 1867)

Grazie!

Nelle cose nuove scoperte ho
visto e sentito tanti modi per
ragionare in tanti modi diversi
ed alunni simili, modi diversi
raggiunti con la fantasia.